

## Resuelve

Página 193

### Límites y derivadas para representar una función

■ Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadrículado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

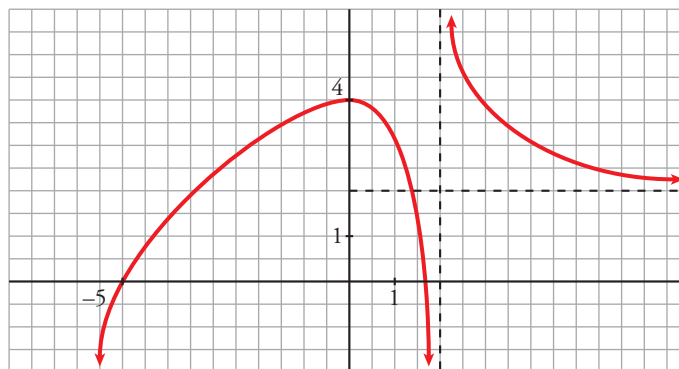
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

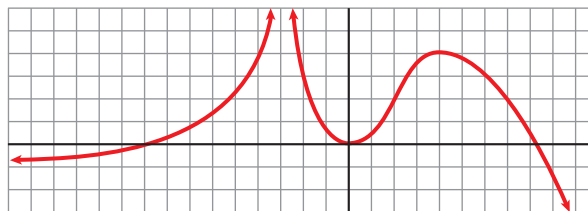
- $f(0) = 4; f'(0) = 0$

- $f(-5) = 0; f(1,75) = 0$

- $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$ , salvo en  $x = 2$ .



■ Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar al ejercicio anterior, la siguiente función:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$

- $f(-9) = 0; f'(0) = 0; f(8) = 0$

- $f'(0) = 0$

- $f(4) = 4; f'(4) = 0$

# 1 Elementos fundamentales para la construcción de curvas

Página 195

1 Halla el dominio de estas funciones y di dónde son continuas y dónde derivables.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3 & \text{b) } y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4} & \text{c) } y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \text{d) } y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} \\ \text{e) } y = \sqrt{x^2 - 2x} & \text{f) } y = \ln(x^2 - 1) & \text{g) } y = \ln(x^2 + 1) & \text{h) } y = \frac{e^x}{x^2} \end{array}$$

a)  $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

$y$  es un polinomio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

$$\text{b) } x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$y$  es un cociente de polinomios, que solo daría problemas de continuidad y derivabilidad en  $x = 4$  y  $x = 1$ , luego es continua y derivable en su dominio,  $\mathbb{R} - \{1, 4\}$ .

c) Como  $\operatorname{sen} x$  se anula cuando  $x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , la función dada no existe para estos valores de  $x$  ya que se produciría una división entre 0. Por tanto, el dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ .

La función es continua y derivable en todo su dominio.

d)  $x^2 + 1 \neq 0$  para todo  $x \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

Se sigue del razonamiento del apartado b) que es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ .

e)  $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Al ser una función raíz, la derivada no existirá en los puntos en los que se anula,  $x = 2$  y  $x = -2$ . Es continua en todo su dominio,  $\mathbb{R} - (0, 2)$ , pero solo es derivable en  $\mathbb{R} - [0, 2]$ .

f)  $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

La derivada no existe para  $x^2 - 1 = 0$ , pero son puntos fuera del dominio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

g)  $x^2 + 1 > 0$  para todo  $x \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

La derivada existe para todo punto  $x$ , luego es derivable y continua en  $\mathbb{R}$ .

h)  $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

La derivada solo da problemas fuera del dominio, luego es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

2 Di dónde son continuas y dónde son derivables las funciones:

a)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

b)  $y = |x^3 - x|$

c)  $y = \operatorname{arc} \cos(x - 4)$

d)  $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$

a)  $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Es continua y derivable en su dominio.

b) La función  $y = |x^3 - x|$  es continua en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ . Por tener puntos angulosos donde se anula el polinomio  $x^3 - x$ , no es derivable en dichos puntos; es decir, en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = -1$  no es derivable.

c) La función  $y = \operatorname{arc} \cos(x - 4)$  está definida cuando  $-1 \leq x - 4 \leq 1$ , es decir, su dominio de definición es el intervalo  $[3, 5]$ . En él la función es continua. Como tiene puntos de tangente vertical en  $x = 3$  y  $x = 5$ , no es derivable en ellos. Sí lo es en el resto del intervalo.

d) Veamos primero el dominio de definición de la función  $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$ .

Para que la función exista, debe ser  $5 - \sqrt{169 - x^2} > 0$ , es decir,  $\sqrt{169 - x^2} < 5$  y además  $x$  debe estar comprendido entre  $-13$  y  $13$  para que tenga sentido la raíz cuadrada.

Elevando al cuadrado:

$$169 - x^2 < 25 \rightarrow 144 < x^2 \rightarrow 12 < x \leq 13 \text{ y } -13 \leq x < -12$$

Luego el dominio de definición es  $[-13, -12) \cup (12, 13]$ .

En su dominio la función es continua. En  $x = -13$  y  $x = 13$  la función tiene puntos de tangente vertical, luego en ellos no es derivable. Por tanto, es derivable en  $(-13, -12) \cup (12, 13)$ .

## Página 196

**3** Halla las simetrías y las periodicidades de las funciones siguientes:

a)  $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d)  $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e)  $y = \operatorname{sen} x + 1/2 (\operatorname{sen} 2x)$

f)  $y = \sqrt[3]{\cos x + 5}$

a)  $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

No es periódica.

b)  $f(-x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

c)  $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

d)  $f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

e)  $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(-2x)) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x)) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas. Es periódica de período  $2\pi$ .

f) Como  $\cos(-x) = \cos x$ , la función es par.

Por otro lado,  $\cos x$  es periódica de período  $2\pi$ . Por tanto, la función dada también es periódica de período  $2\pi$ .

**Página 197**

**4** Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a)  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x}$

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

c)  $y = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$

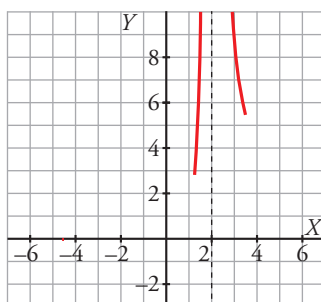
d)  $y = \log(x^2 - 4)$

a) El denominador se anula cuando  $x = 2$  y cuando  $x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = +\infty$ , ya que en las cercanías del punto 2 los dos términos de la fracción son

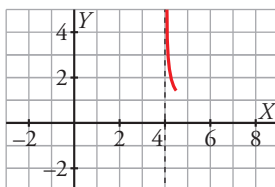
positivos. Por tanto, en  $x = 2$  hay una asíntota vertical.

Por otro lado,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 0$  y en  $x = 0$  no hay una asíntota vertical.



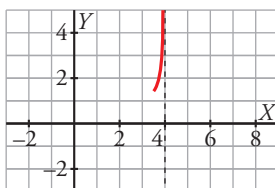
b) El denominador se anula cuando  $x = 4$  y el dominio de la función es el intervalo  $(4, +\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$  y en  $x = 4$  tenemos una asíntota vertical.



c) El denominador se anula cuando  $x = 4$  y el dominio de la función es el intervalo  $(-\infty, 4)$ .

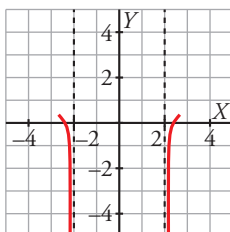
$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{\sqrt{4-x}} = +\infty$  y en  $x = 4$  tenemos una asíntota vertical.



d) El dominio de definición es  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  ya que  $x^2 - 4 > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \log(x^2 - 4) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty$  porque en ambos casos  $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$ .

Luego tiene dos asíntotas verticales: una en  $x = -2$  y otra en  $x = 2$ .



Página 199

5 Halla las ramas en el infinito de las funciones siguientes:

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$

b)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e)  $y = \ln(x^2 + 1)$

f)  $y = 2^{x-1}$

g)  $y = x \operatorname{sen} x$

h)  $y = x - \cos x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$

Tiene sendas ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser una función polinómica.

b)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

En el infinito, la función dada es equivalente a  $x^2 + 1$ , luego tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2} = x + 4 + \frac{12x - 16}{(x - 2)^2}$

La función tiene una asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  y es la recta  $y = x + 4$ .

d) En el infinito, la función es equivalente a  $\sqrt{x^2} = |x|$ , luego  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$

$y = \ln(x^2 + 1)$  es equivalente en el infinito a  $y = \ln(x^2) = 2 \ln |x|$ .

Luego  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln |x|}{x} = 0$ .

Lo mismo ocurre cuando  $x \rightarrow -\infty$  y, por tanto, tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

f) Esta función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando  $x \rightarrow +\infty$  por ser una función exponencial. Por el mismo motivo, la recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \operatorname{sen} x)$  no existe.

Análogamente ocurre cuando  $x \rightarrow -\infty$  y, por tanto, esta función no tiene ni asíntotas ni ramas parabólicas.

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1$  porque la función  $\cos x$  está acotada entre  $-1$  y  $1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  no existe.

En consecuencia, no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

**6** ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen estas funciones?

a)  $y = \frac{1}{x+1}$       b)  $y = \frac{3x}{x+1}$       c)  $y = \frac{x^2}{x+1}$       d)  $y = \frac{x^4}{x+1}$   
 e)  $y = \frac{x^2}{e^x}$       f)  $y = \sqrt[3]{x^2+3}$       g)  $y = x + \sqrt{x}$       h)  $y = \operatorname{tg} x$

a) Tiene una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Es la recta  $y = 0$ .

b)  $y = \frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$  tiene una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Es la recta  $y = 3$ .

c)  $y = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ . Por tanto, la recta  $y = x - 1$  es la asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

d)  $y = \frac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$  tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser equivalente en el infinito a una función polinómica.

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ . La recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2/e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ . La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{x^3}} = 0$$

Se da la misma situación cuando  $x \rightarrow -\infty$  por ser una función par. Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

Como su dominio de definición es el intervalo  $[0, +\infty)$ , no podemos estudiarla cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

h) La función  $y = \operatorname{tg} x$  es periódica y no acotada. No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.

**Página 200**

**7** Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de estas funciones:

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b)  $y = \ln(x^2 + 1)$

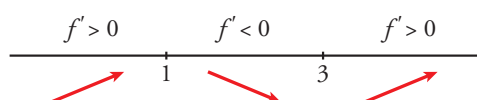
a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

•  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

•  $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :

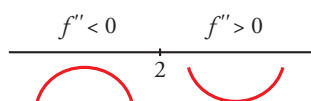


Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

•  $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(2, 7)$ .

b)  $y = \ln(x^2 + 1)$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

•  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

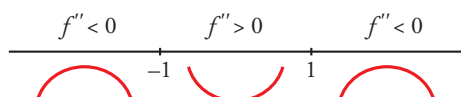
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) < 0$  para  $x < 0$   
 $f''(x) > 0$  para  $x > 0$  } Hay un mínimo en  $(0, 0)$ .

•  $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de  $f''(x)$



Hay un punto de inflexión en  $(-1, \ln 2)$  y otro en  $(1, \ln 2)$ .

**8 Halla los puntos singulares de:**

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$

b)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

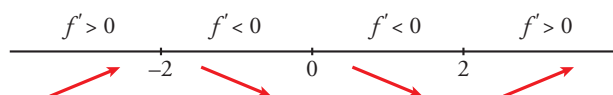
d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de  $f'(x)$ :



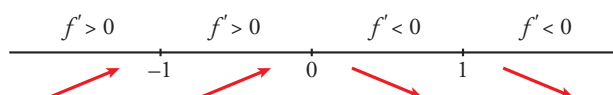
Hay un máximo en  $(-2, 64)$ , un mínimo en  $(2, -64)$ , y un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

b)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de  $f'(x)$ :



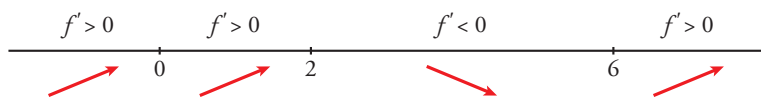
Hay un máximo en  $(0, 0)$ .

c)  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 0)$  y un mínimo en  $(6, \frac{27}{2})$ .

d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ . Dominio =  $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin \text{Dominio.}$$

No hay puntos singulares.



## 2 El valor absoluto en la representación de funciones

Página 201

1 Representa:

a)  $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

b)  $y = |x - 5|x$

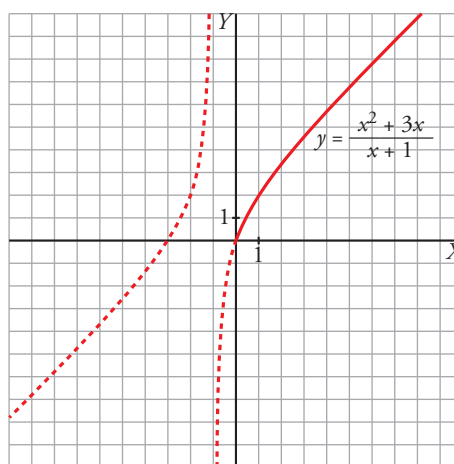
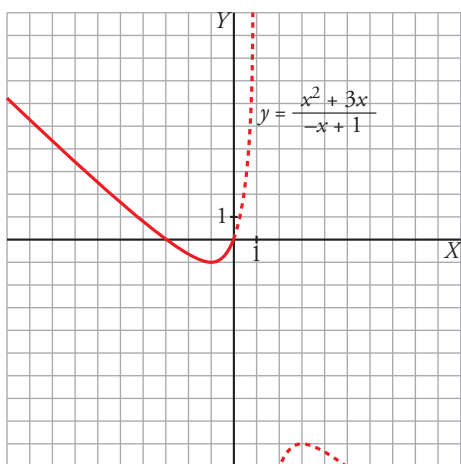
c)  $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

d)  $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

a) El único valor absoluto que interviene es  $|x|$ . La abscisa en donde cambia de signo  $x$  es 0. Por tanto:

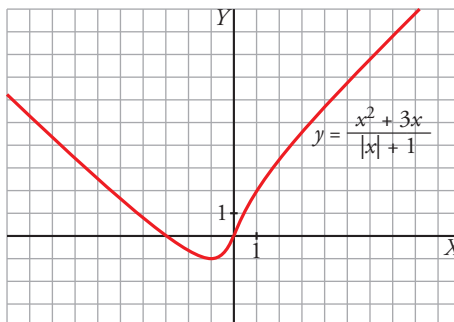
$$x < 0, |x| = -x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

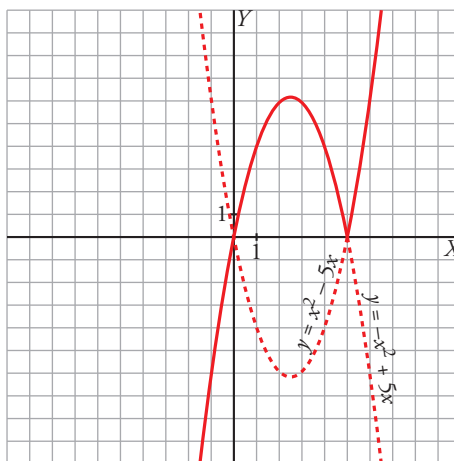


b) El único valor absoluto que interviene es  $|x - 5|$ . La abscisa donde cambia de signo  $x - 5$  es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$$

$$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



- c) Intervienen dos valores absolutos,  $|x + 1|$  y  $|x - 3|$ , que cambian de signo en las abscisas  $x = -1$  y  $x = 3$ , respectivamente.

Por tanto:

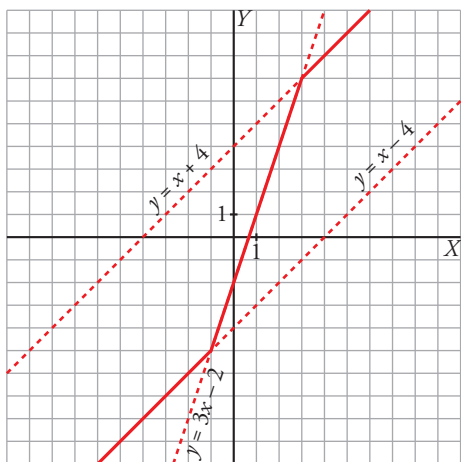
$$x < -1, |x + 1| = -x - 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$$

$$-1 \leq x < 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$$

$$x \geq 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$$

Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



- d) Las abscisas en donde cambia de signo  $x^2 - 1$  son  $-1$  y  $1$ . Analizamos cómo queda definido el valor absoluto:

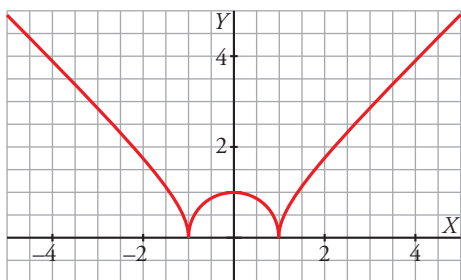
$$x < -1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$-1 \leq x < 1 \rightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x \geq 1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \sqrt{|x^2 - 1|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y la gráfica es:



### 3 Representación de funciones polinómicas

Página 203

**1 Representa estas funciones:**

a)  $y = x^4 - 8x^2 + 7$

b)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c)  $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

d)  $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

e)  $y = x^3 - 3x$

f)  $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a)  $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- Simetrías:

$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

- Ramas infinitas:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos singulares:  $(0, 7)$ ;  $(-2, -9)$ ;  $(2, -9)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$  Punto:  $(0, 7)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Puntos:  $(-\sqrt{7}, 0)$ ;  $(-1, 0)$ ;  $(1, 0)$ ;  $(\sqrt{7}, 0)$

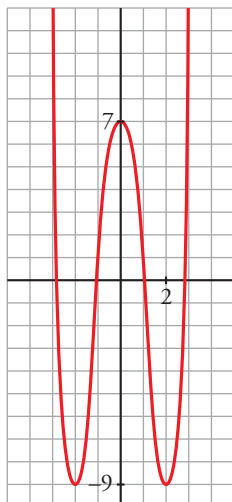
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Puntos  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$  y  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- Gráfica:



b)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- Simetrías:

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$ , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, -64); (-3, -189)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto: (0, 0)

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (-4,19; 0)

- Puntos de inflexión:

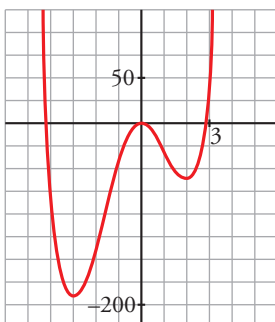
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; -34,82) y (-1,79; -107,22)

- Gráfica:



c)  $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- Simetrías:

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$ , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos: (1, 7); (-1, -9); (3, -9)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto: (0, 0)

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 12) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (-1,65; 0)

- Puntos de inflexión:

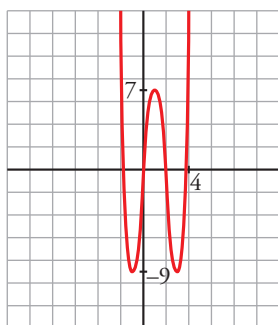
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{cases}$$

Puntos: (2,15; -1,83) y (-0,15; -1,74)

- Gráfica:



d)  $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- Simetrías:

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$ , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (0, -16); (1, -17)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$  Punto:  $(0, -16)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$

$3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \rightarrow$  tiene una sola raíz, que está entre  $-2$  y  $-1$ ; pues, si  $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ ,  $g(-2) = -16 < 0$  y  $g(-1) = 3 > 0$ .

Puntos:  $(2, 0)$  y  $(k, 0)$ , con  $k$  entre  $-2$  y  $-1$ .

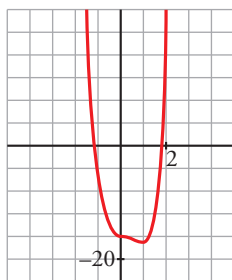
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos:  $(0, -16)$  y  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{448}{27}\right)$

- Gráfica:



e)  $y = x^3 - 3x$

- Simetrías:

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ . Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos:  $(-1, 2)$ ;  $(1, -2)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

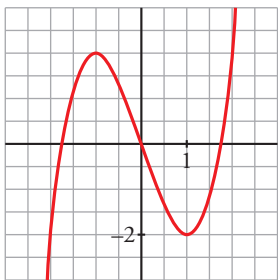
Puntos:  $(0, 0)$ ;  $(-\sqrt{3}, 0)$ ;  $(\sqrt{3}, 0)$

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$$
 Punto  $(0, 0)$

- Gráfica:



f)  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- Simetrías:

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

- Ramas infinitas:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0)$ ;  $(-2, -4)$ ;  $(2, -4)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0)$ ;  $(-2\sqrt{2}, 0)$ ;  $(2\sqrt{2}, 0)$

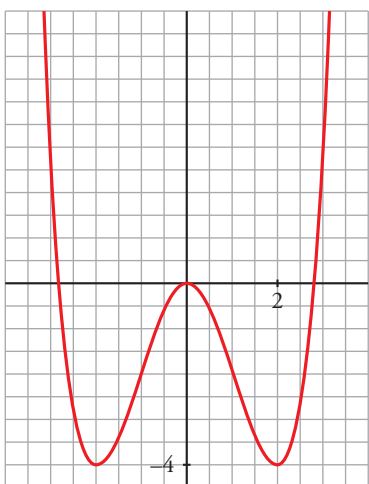
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Puntos:  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$ ;  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- Gráfica:



## 4 Representación de funciones racionales

Página 205

1 Representa:

$$a) y = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad b) y = \frac{x^2-9}{x^2-4} \qquad c) y = \frac{x^2-2x-8}{x} \qquad d) y = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$$

$$a) y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

• Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

• Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (-x) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por encima)}$$

$$f(x) - (-x) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

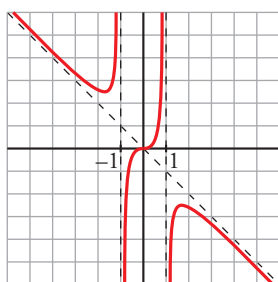
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

• Cortes con los ejes:

Corta a los ejes en (0, 0).

• Gráfica:





b)  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Simetrías:

$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- Asíntota horizontal:

$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1$  es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$  si  $x \rightarrow -\infty$  (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$  si  $x \rightarrow +\infty$  (curva por debajo)

- Puntos singulares:

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$  Punto:  $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

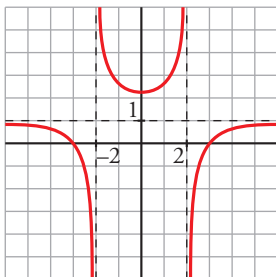
- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow$  Punto:  $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos:  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$

- Gráfica:



c)  $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetrías:

$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$ , ni respecto al origen.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (x - 2) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por encima)}$$

$$f(x) - (x - 2) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0 \text{ para todo } x \text{ del dominio.}$$

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

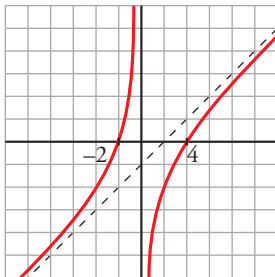
- Cortes con los ejes:

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Puntos:  $(-2, 0)$  y  $(4, 0)$

— No corta al eje Y, pues no está definida en  $x = 0$ .

- Gráfica:



d)  $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima)}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

- Puntos de inflexión:

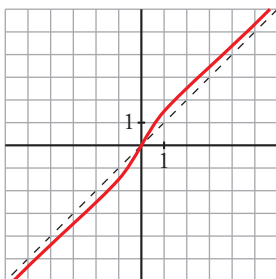
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos:  $(0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$

- Gráfica:



## 5 Representación de otros tipos de funciones

Página 207

### 1 Representa:

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b)  $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c)  $y = \frac{\ln x}{x}$

d)  $y = \frac{e^x}{x^2}$

e)  $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

f)  $y = x^3 e^x$

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- Dominio:  $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

- Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$y = -x - 1$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Como no pertenece al dominio de  $f(x)$ , no hay puntos singulares.

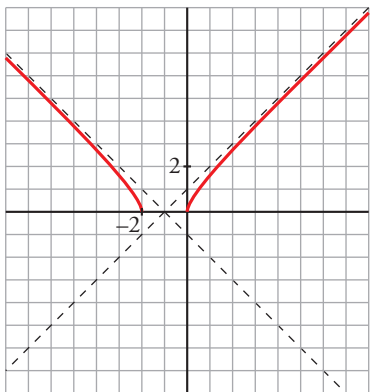
- Cortes con los ejes:

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0)$  y  $(-2, 0)$

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

- Gráfica:



b)  $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- Dominio:  $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

$Dominio = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$

$y = -x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$

$y = x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Como no pertenece al dominio de  $f(x)$ , no hay puntos singulares.

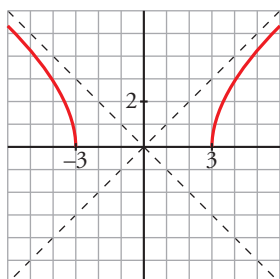
- Cortes con los ejes:

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-9} \rightarrow x^2-9=0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos:  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$

— No corta al eje  $Y$ , pues no existe  $f(0)$ .

- Gráfica:



c)  $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: Su dominio de definición es el intervalo  $(0, +\infty)$ .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \rightarrow \text{Tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

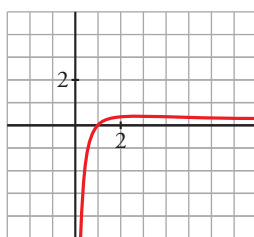
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Tiene un punto singular: } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

- Gráfica:



d)  $y = \frac{e^x}{x^2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Además,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  del dominio.

$y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

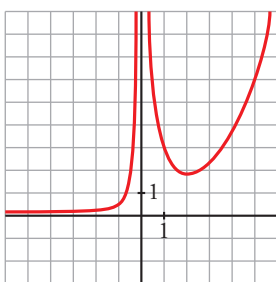
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto} \left( 2, \frac{e^2}{4} \right)$$

- Gráfica:



e)  $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ } f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ positivo.}$$

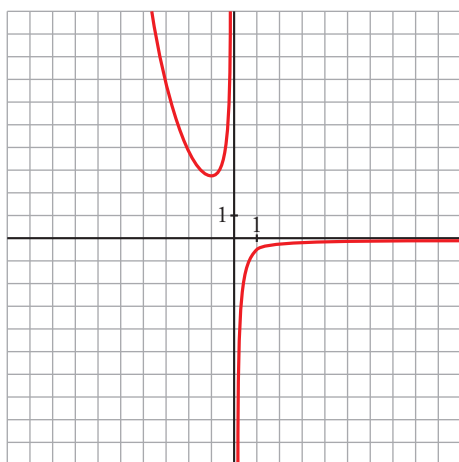
$y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x} (x + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Punto: } (-1, -e)$$

- Gráfica:



f)  $y = x^3 e^x$

- Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$$

La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^x = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = (3x^2 + x^3) e^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 + x^3) e^x = 0 \rightarrow x = -3, x = 0$$

$$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x) e^x$$

$$f''(-3) = (-27 + 54 - 18) e^{-3} = 9e^{-3} \rightarrow x = -3 \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$f(-3) = -27e^{-3} \approx -1,34$$

$f''(0) = 0 \rightarrow x = 0$  es un punto de inflexión ya que la derivada segunda cambia de signo al pasar por él.

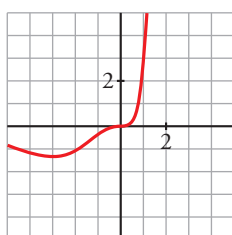
$$f(0) = 0$$

Los otros dos puntos de inflexión son:  $x_1 = -3 + \sqrt{3}$  y  $x_2 = -3 - \sqrt{3}$ .

$$f(x_1) = -0,57$$

$$f(x_2) = -0,93$$

- Gráfica:





## Ejercicios y problemas resueltos

Página 208

### 1. Del estudio a la gráfica (asíntotas horizontales y verticales)

**Hazlo tú.** Representa  $y = f(x)$ :

$Dom f = \mathbb{R} - \{-2\}$ ;  $f$  es derivable en todo su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1^+ \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$f(0) = 0; f(7) = 0 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4; f(4) = 2; f''(4) < 0$$

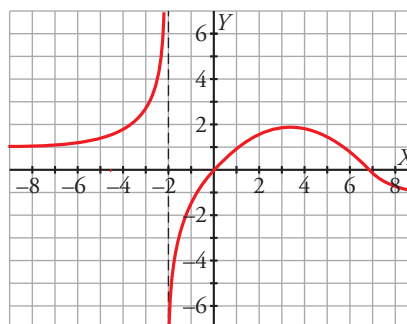
- I) Por ser derivable en su dominio, es continua en él y no tiene puntos angulosos.  
 II) En  $x = -2$  la función tiene una asíntota vertical y las tendencias nos dicen cómo se acerca a ella.

La recta  $y = 1$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  y se acerca a ella por encima.

Análogamente, la recta  $y = -1$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  y también se acerca por encima.

- III) Corta al eje horizontal en los puntos  $(0, 0)$  y  $(7, 0)$ .

El único extremo relativo está en el punto  $(4, 2)$  y, además, es un máximo.



### 2. Del estudio a la gráfica (simetrías y asíntotas oblicuas y verticales)

**Hazlo tú.** Representa  $y = f(x)$ :

$Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ; función impar.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(3) = 0; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; f(0) = 0$$

- I) Por ser derivable en su dominio, es continua en él y no tiene puntos angulosos.  
 II) Por ser impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

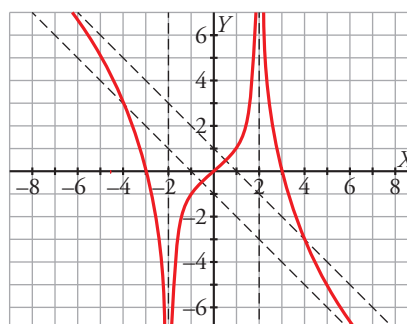
La recta  $x = 2$  es una asíntota vertical y, por simetría, también lo es la recta  $x = -2$ .

Las tendencias en esta última asíntota se obtienen por simetría de las primeras.

Por otra parte, la recta  $y = -x - 1$  es la asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ . De nuevo, por simetría, la recta  $y = -x + 1$  es la asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

- III) Corta al eje horizontal en los puntos  $(3, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(-3, 0)$ , siendo este último por simetría.

Finalmente, el punto  $(0, 0)$  es el único punto de tangente horizontal y, por las características de la curva, es un punto de inflexión.



Página 209

### 3. Representación de una función polinómica

**Hazlo tú.** Estudia los puntos de corte con los ejes, los puntos singulares y el crecimiento y decrecimiento de esta función:

$$y = 2x^6 - 3x^4$$

Representa su gráfica.

- Cortes con los ejes:

$$x = 0; f(0) = 0$$

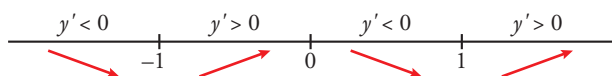
$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow 2x^6 - 3x^4 = 0 \rightarrow x^4(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = 0 \end{cases}$$

Pasa por  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$  y  $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ .

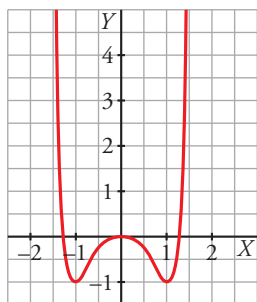
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^5 - 12x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f'(-1) = -1 \\ x = 0; f'(0) = 0 \\ x = 1; f'(1) = -1 \end{cases}$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Es decreciente en  $(-\infty, -1)$  y en  $(0, 1)$  y creciente en  $(-1, 0)$  y en  $(1, +\infty)$ .



### 4. Representación de una función racional con ramas parabólicas

**Hazlo tú.** Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$$

- Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{(-x)^2} = \frac{x^4 - 1}{x^2} = f(x)$$

Es simétrica respecto al eje  $Y$ ; es decir, es par.

- Asíntota vertical:  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 1}{x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 1}{x^2} = -\infty$$

- Ramas en el infinito:

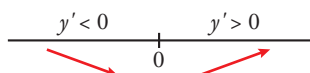
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 1}{x^2} = +\infty$$

Tiene ramas parabólicas porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3} = \pm\infty$ .

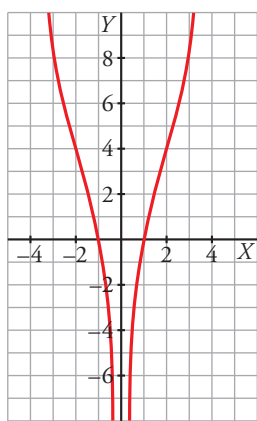
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x^4 + 1)}{x^3}; f'(x) = 0 \text{ no es posible, ya que el numerador es siempre distinto de 0.}$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Es decreciente en  $(-\infty, 0)$  y creciente en  $(0, +\infty)$ .



## Página 210

### 5. Representación de una función racional con asíntotas oblicuas

**Hazlo tú.** Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos para representar esta función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

ya que, al estar  $x - 1$  elevado al cuadrado, el signo del cociente siempre es positivo en las proximidades de 1. Luego, la recta  $x = 1$  es la asíntota vertical de la función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota oblicua de la función.}$$

- Puntos singulares:

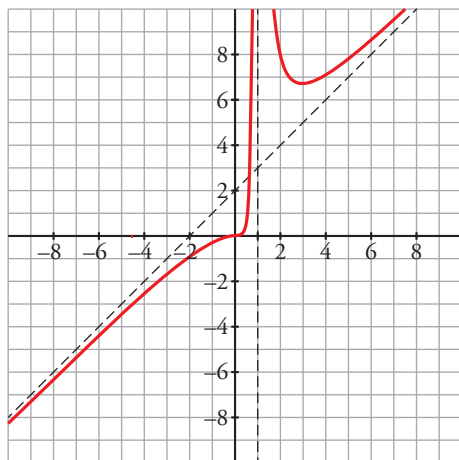
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$$



$$f(0) = 0$$

$$f(3) = \frac{27}{4}$$



## 6. Representación de una función racional con asíntotas horizontales

**Hazlo tú.** Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$$

- El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ .
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty. \text{ Lo mismo ocurre cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty$$

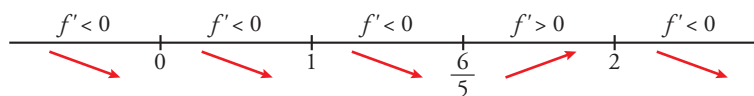
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty \text{ ya que, al estar } x-2 \text{ elevado al cuadrado, el signo del cociente no cambia al pasar de un lado al otro de 2 en sus proximidades.}$$

Las rectas  $x = 1$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales.

- Puntos singulares:

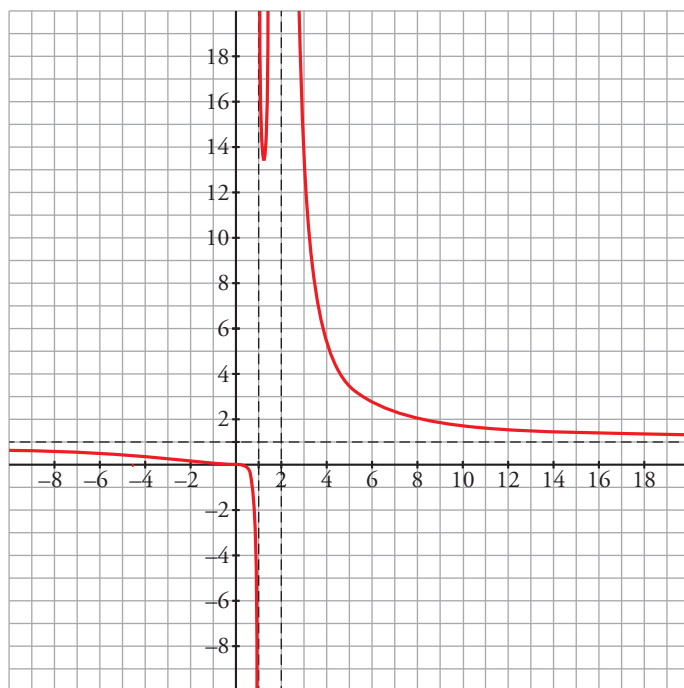
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} \right)' = \frac{3x^2(x-2)^2(x-1) - x^3[2(x-2)(x-1) + (x-2)^2]}{(x-2)^4(x-1)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-2)(x-1) - x^3[2(x-1) + (x-2)]}{(x-2)^3(x-1)^2} = \frac{-5x^3 + 6x^2}{(x-2)^3(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -5x^3 + 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \frac{6}{5}$$



$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}-2\right)^2\left(\frac{6}{5}-1\right)} = \frac{27}{2}$$



Página 211

### 7. Función con valor absoluto

Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1|$$

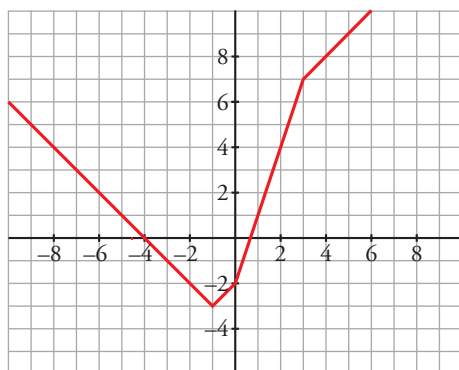
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$-|x - 3| = \begin{cases} -[-(x - 3)] & \text{si } x < 3 \\ -(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los puntos donde cambia de signo cada sumando, sumamos las expresiones y se obtiene:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} -x + x - 3 - x - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x + x - 3 + x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x + x - 3 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - x + 3 + x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x < -1 \\ x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



## 8. Función logarítmica

**Hazlo tú.** Representa la siguiente función:

$$y = \ln \frac{x-3}{x-1}$$

- Dominio de definición:

Resolvemos la inecuación  $\frac{x-3}{x-1} > 0$  y concluimos que la función está definida en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

- Asíntotas verticales:  $x = 1$  y  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x-3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \frac{x-3}{x-1} = -\infty$$

- Asíntota horizontal:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

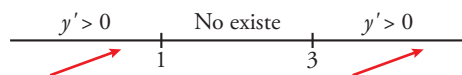
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

- Puntos singulares:

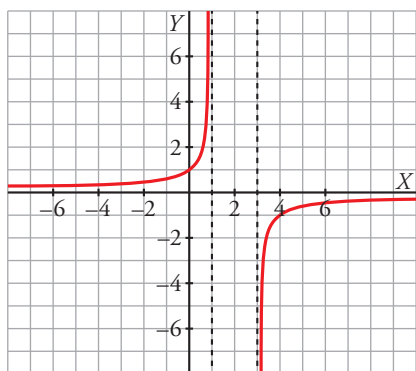
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-3}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

Como no puede ser 0, no tiene puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



Es creciente en  $(-\infty, 1)$  y en  $(3, +\infty)$ .



**Página 212**

## 9. Estudio y gráfica de otras funciones

**Hazlo tú.** Representa las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x}{\ln x^2}$

b)  $y = \frac{2x+1}{e^{-x}}$

- a) • Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

- Tiene simetría impar ya que  $f(-x) = -f(x)$ . Por tanto, la estudiamos solo para valores positivos de  $x$ .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ tiene una discontinuidad evitable.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x^2} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x^2} = +\infty \rightarrow$  La recta  $x = 1$  es una asíntota vertical. Por simetría, la recta  $x = -1$  también lo es.

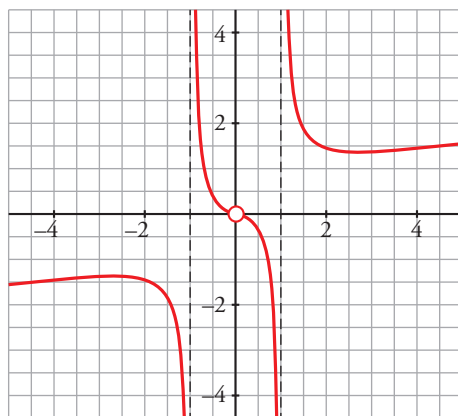
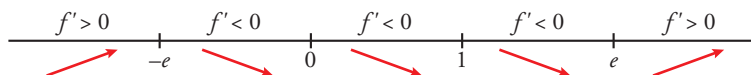
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x/x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x^2} = 0 \rightarrow$  Tiene una rama parabólica.

• Puntos singulares:

$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x^2}\right)' = \frac{\ln x^2 - 2}{\ln^2(x^2)} \rightarrow \ln x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{e^2} = \pm e$

$f(e) = \frac{e}{2}$ ,  $f(-e) = -\frac{e}{2}$



b) • Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ . No tiene asíntotas verticales.

• Ramas infinitas:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = +\infty$ , ya que  $e^{-x} \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^{-x}} = +\infty \rightarrow$  Tiene una rama parabólica.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = 0 \rightarrow$  La recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

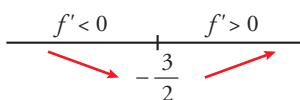
La función corta al eje horizontal en  $x = -\frac{1}{2}$ .

Si  $x < -\frac{1}{2}$ , la función toma valores negativos y está por debajo de la asíntota.

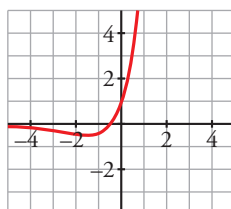
• Puntos singulares:

$f'(x) = \frac{2e^{-x} - (2x+1)(-e^{-x})}{(e^{-x})^2} = \frac{3+2x}{e^{-x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$



$f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,45$

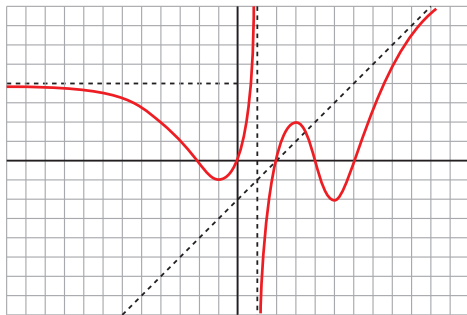


## Ejercicios y problemas guiados

Página 213

### 1. Descripción de una gráfica

Describir la siguiente gráfica dando los elementos necesarios para que un compañero la pueda representar a partir de la descripción.



- El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Es derivable en su dominio puesto que no presenta puntos angulosos.
- La recta  $y = 4$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ya que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ . Se acerca por debajo de la asíntota.

La recta  $x = 1$  es la asíntota vertical de la función. La posición respecto de la asíntota es:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

La recta  $y = x - 2$  es la asíntota oblicua de la función cuando  $x \rightarrow +\infty$ . La curva corta a la asíntota oblicua en los puntos de abscisas  $x = 2$  y  $x = \frac{7}{2}$ . Después se acerca por debajo de la asíntota.

- Los puntos  $(-1, -1)$  y  $(5, -2)$  son mínimos relativos de la función. Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto  $(3, 2)$ .
- Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos:  $(-2, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(6, 0)$ .

### 2. Representación de una función polinómica

Estudiar y representar la siguiente función:

$$f(x) = 40(x^2 + x)^2$$

- Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ . Al ser polinómica, es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .
- No tiene simetrías:

$$f(-x) = 40[(-x)^2 - x]^2 = 40(x^2 - x)^2$$

- Ramas en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 40(x^2 + x)^2 = +\infty$$

Tiene ramas parabólicas, ya que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{40(x^2 + x)^2}{x} = \pm\infty$ .

- Cortes con los ejes:

$$x = 0, f(0) = 0$$

$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pasa por  $(-1, 0)$  y  $(0, 0)$ .



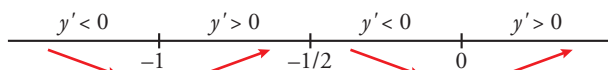
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 80(x^2 + x)(2x + 1)$$

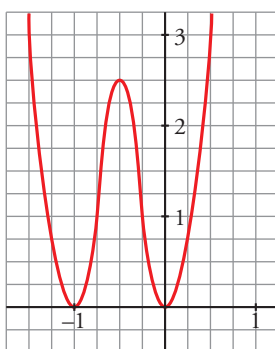
$$f'(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f(-1) = 0 \\ x = -\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ x = 0; f(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Es decreciente en  $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  y es creciente en  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$ .



### 3. Representación de una función radical

**Representar la siguiente función:**

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ . Es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , ya que el radicando es un polinomio que siempre es positivo.
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$ . Es una función par.
- Ramas infinitas:

Vamos a estudiar solo en  $+\infty$ . Para  $-\infty$  aplicaremos la simetría de la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

La recta  $y = x$  es una asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ , pues  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ .

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ . Por tanto, la curva queda por encima de la asíntota.

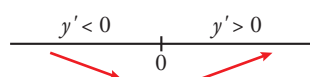
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

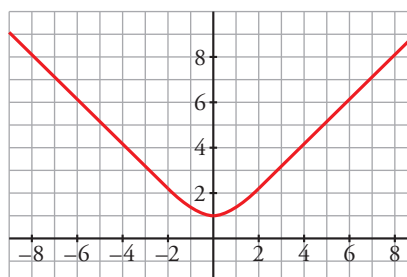
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x = 0, f(0) = 1$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Decreciente en  $(-\infty, 0)$  y creciente en  $(0, +\infty)$ .



### 4. Curva con asíntotas

Representar la siguiente función:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|}$

- El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

La función tiene simetría par ya que  $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 + 1}}{|-x|} = f(x)$ . Basta estudiarla para valores positivos de  $x$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = +\infty \rightarrow$  La recta  $x = 0$  es la asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} = 1$$

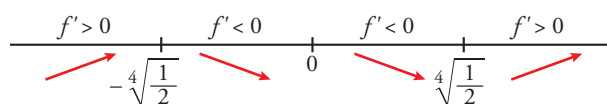
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)} = 0$$

La recta  $y = x$  es la asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

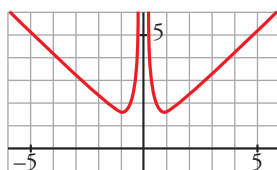
$$f'(x) = \left( \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x} \right)' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot x - \sqrt{x^4 + 1}}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4 + 1)}{x^2 \sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x^4 - 1}{x^2 \sqrt{x^4 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 0,84$$

(Hemos calculado la derivada suponiendo que  $x$  toma valores positivos).



$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} \approx 1,46 \rightarrow \left( \sqrt[4]{\frac{1}{2}}; 1,46 \right) \text{ es un mínimo relativo de la función.}$$



## Ejercicios y problemas propuestos

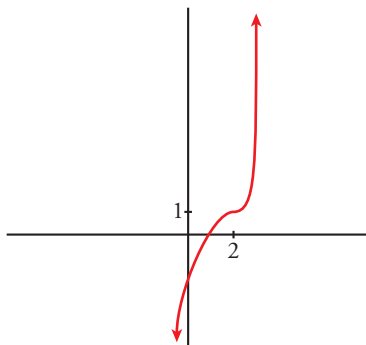
Página 214

### Para practicar

#### Descripción de una gráfica

1 Representa una función continua y derivable en  $\mathbb{R}$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad f(2) = 1, f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x, f'(2) = 0$$



2 De una función  $y = f(x)$  tenemos la siguiente información:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

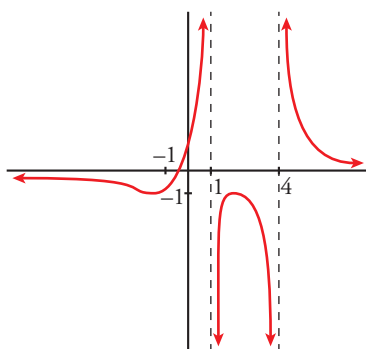
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$$

$$\text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$$

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representala.



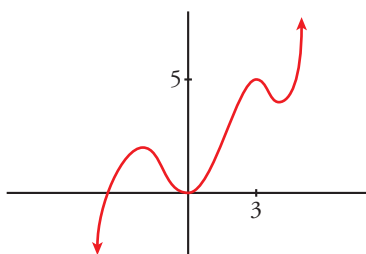
3 Dibuja la gráfica de una función continua y derivable en  $\mathbb{R}$  de la que se conocen los siguientes datos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

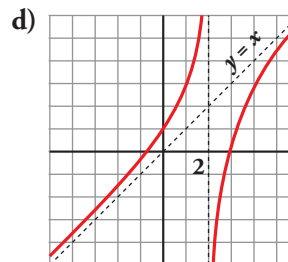
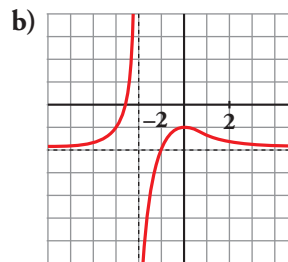
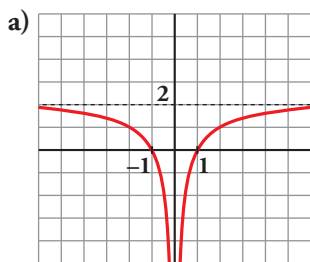
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



4 Describe las siguientes funciones indicando su dominio, sus simetrías (si las tienen), sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hazlo dando valores de la función, de su derivada y de ciertos límites.



a) • Asíntota horizontal:  $y = 2$ .

Asíntota vertical:  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < 2$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

•  $f(x)$  no tiene puntos singulares.

• Decrece en  $(-\infty, 0)$  y crece en  $(0, +\infty)$

b) • Asíntota horizontal:  $y = -2$ .

Asíntota vertical:  $x = -2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > -2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > -2$ )

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

• Puntos singulares:

$$f'(0) = 0; \quad f(0) = -1. \text{ Máximo en } (0, -1).$$

• Creciente en  $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$  y decreciente en  $(0, +\infty)$ .

c) • Asíntota horizontal: si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

• Punto singulares:

$$f'(0) = 0; \quad f(0) = 0. \text{ Mínimo en } (0, 0).$$

$$f'(2) = 0; \quad f(2) = 1. \text{ Máximo en } (2, 1).$$

• Decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  y creciente en  $(0, 2)$ .

d) • Asíntota vertical:  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

• Asíntota oblicua:  $y = x$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < x$ )

•  $f(x)$  no tiene puntos singulares.

• Creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

## ■ Características de las funciones

**5** Indica el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a)  $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{3x - 21}}$

c)  $y = \ln(4 - \sqrt{x})$

d)  $y = \frac{1}{1 + \cos x}$

e)  $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

f)  $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}}$

a) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser no negativo.

$$-x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow \text{El dominio de definición es el intervalo } [-1, 4].$$

b) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser positivo.

$$3x - 21 \geq 0 \rightarrow \text{El dominio de definición es el intervalo } (7, +\infty).$$

c) Para que se pueda definir la función, el argumento del logaritmo debe ser positivo y, además,  $x \geq 0$  para que exista la raíz.

$$4 - \sqrt{x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} < 4 \rightarrow x \text{ debe estar en el intervalo } [0, 16).$$

d)  $1 + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = (2n + 1)\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Su dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{(2n + 1)\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ .

e) La tangente no está definida cuando  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Además, la función no está definida cuando  $\operatorname{tg} x = 0$ , es decir, cuando  $x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Por tanto, el dominio de definición es  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$ .

f) Para que la función esté bien definida, debe ser  $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$ .

Por otra parte, la función es periódica de período  $\pi$ .

Dentro del intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$  cuando  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Usando la periodicidad, el dominio de definición es la unión de todos los intervalos de la forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

**6** Di cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles son impares y cuáles ninguna de las dos cosas:

a)  $y = x^2 + 1$

b)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

c)  $y = \operatorname{tg} \pi x$

d)  $y = e^{|x|}$

e)  $y = \frac{|x|}{x^2 - 2x}$

f)  $y = 2\cos \frac{x}{2}$

a)  $f(-x) = (-x)^2 + 1 = f(x) \rightarrow$  Función par.

b)  $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 3}} = -f(x) \rightarrow$  Función impar.

c)  $f(-x) = \operatorname{tg}[\pi(-x)] = -f(x) \rightarrow$  Función impar.

d)  $f(-x) = e^{-|x|} = f(x) \rightarrow$  Función par.

e)  $f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 2(-x)} = \frac{|x|}{x^2 + 2x} \rightarrow$  No es simétrica.

f)  $f(-x) = 2\cos \frac{-x}{2} = f(x) \rightarrow$  Función par.

**7 Determina el periodo de cada una de estas funciones:**

a)  $y = \operatorname{sen} 3x$

b)  $y = \operatorname{sen} 2\pi x$

c)  $y = \operatorname{tg} \pi x$

d)  $y = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$

e)  $y = \cos \frac{\pi}{2} x$

f)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{\pi}$

a)  $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \operatorname{sen}(3x + 2\pi) = \operatorname{sen} 3x = f(x) \rightarrow$  Su período es  $\frac{2\pi}{3}$ .

b)  $f(x + 1) = \operatorname{sen}[2\pi(x + 1)] = \operatorname{sen}(2\pi x + 2\pi) = \operatorname{sen} 2\pi x = f(x) \rightarrow$  Su período es 1.

c)  $f(x + 1) = \operatorname{tg}[\pi(x + 1)] = \operatorname{tg}(\pi x + \pi) = \operatorname{tg} \pi x = f(x) \rightarrow$  Su período es 1.

d) Para que sea periódica de período  $T$ , debe cumplirse que:

$$f(x + T) = \operatorname{sen}((x + T)^2 + 1) = \operatorname{sen}(x^2 + 2Tx + T^2 + 1) = f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 1 + 2k\pi)$$

pero esto no es posible ya que no se puede hallar el hipotético período independientemente de  $x$ .

e)  $f(x + 4) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{2}x = f(x) \rightarrow$  Periódica de período 4.

f)  $f(x + \pi^2) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{\pi} + \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{x}{\pi} = f(x) \rightarrow$  Periódica de período  $\pi^2$ .

**8 Para cada una de esas funciones, escribe las ecuaciones de sus asíntotas verticales y di la posición de la curva respecto a ellas:**

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b)  $y = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}}$

c)  $y = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2x}$

d)  $y = \frac{1}{\ln x}$

a) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando  $x = 1$  y  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

b) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando  $x = 3$  y  $x = -3$ . La posición de la función respecto de las asíntotas debe tener en cuenta el dominio de definición, que es  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$

c)  $y = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2x} = \frac{x(x - 1)}{x(x - 2)} = \frac{x - 1}{x - 2}$  salvo en el punto  $x = 0$ .

Por tanto, en  $x = 0$  tiene una discontinuidad evitable. En  $x = 2$  tiene una asíntota vertical y la posición es:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = +\infty$$

d) El dominio de definición es  $(0, +\infty) - \{1\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$$
 En  $x = 0$  no hay asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow$$
 La recta  $x = 1$  es la asíntota vertical de la función.

■ Funciones polinómicas

9 Estudia y representa las siguientes funciones:

a)  $y = -x^2 + 3x + 10$

c)  $y = x^3 + 3x^2$

e)  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

g)  $y = x^5 - 5x^3$

i)  $y = x^4 - 4x^2$

b)  $y = x^3 - 9x$

d)  $y = x^3 - 3x^2 + 5$

f)  $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

h)  $y = (x - 1)^3 - 3x$

j)  $y = 1 - (x - 1)^3$

a) Se trata de una función cuadrática (parábola) que podemos representar calculando sus puntos notables.

- Cortes con los ejes:

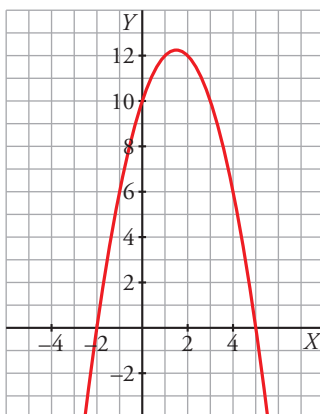
$x = 0, f(0) = 10$

$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 3x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$  Pasa por  $(-2, 0)$  y  $(5, 0)$ .

- Vértice:

$x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 10 = \frac{49}{4}$

- Otros puntos:  $(-3, -8), (-1, 6), (0, 10), (1, 12), (2, 12), (3, 10), (4, 6), (6, -8)$ .



- La función es creciente en  $(-\infty, \frac{3}{2})$  y decreciente en  $(\frac{3}{2}, +\infty)$ .

b) El dominio de definición es todo  $\mathbb{R}$ . Es continua y derivable por ser una función polinómica.

- Tiene simetría impar, ya que  $f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -f(x)$ .

- Cortes con los ejes:

$x = 0, f(0) = 0$

$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$  Pasa por  $(-3, 0), (0, 0)$  y  $(3, 0)$ .

- No tiene asíntotas. En el infinito tiene ramas infinitas y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x) = +\infty$ .

Por simetría,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x) = -\infty$ .

- Puntos singulares:

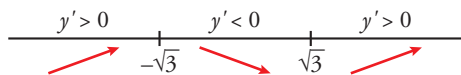
$f'(x) = 3x^2 - 9$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

Por simetría:  $x = \sqrt{3}, f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ .

- Crecimiento y decrecimiento:



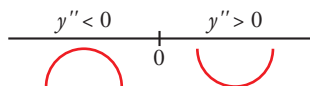
Es creciente en los intervalos  $(-\infty, -\sqrt{3})$  y  $(\sqrt{3}, +\infty)$ . Es decreciente en  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

El punto  $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$  es un máximo relativo. El punto  $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$  es un mínimo relativo.

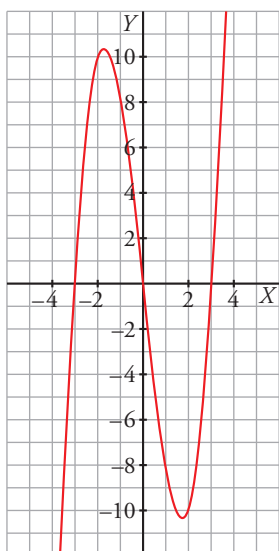
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$$



El punto  $(0, 0)$  es un punto de inflexión.



c)  $y = x^3 + 3x^2$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

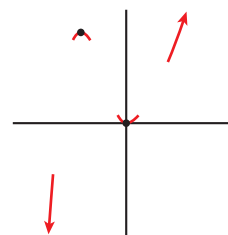
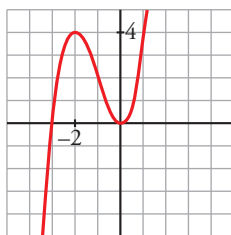
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \quad 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x + 6) = 0$$

$$x = 0, \quad f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ es un mínimo.}$$

$$x = -2, \quad f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \rightarrow (-2, 4) \text{ es un máximo.}$$

- Representación:



d)  $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

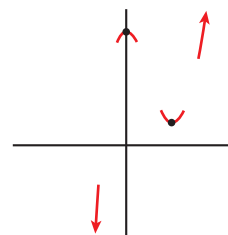
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



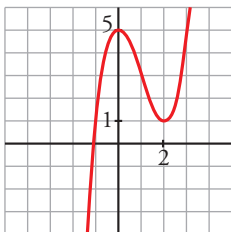
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, f(0) = 5 \rightarrow (0, 5) \text{ es un máximo.} \\ x = 2, f(2) = 1 \rightarrow (2, 1) \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$



- Representación:



e)  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

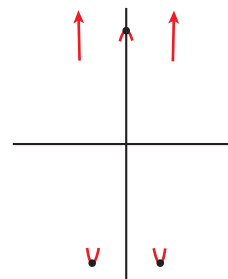
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

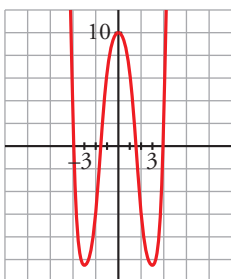
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, f(0) = 10 \rightarrow \text{máximo en } (0, 10). \\ x = 3, f(3) = -41/4 \rightarrow \text{mínimo en } (3, -41/4). \\ x = -3, f(-3) = -41/4 \rightarrow \text{mínimo en } (-3, -41/4). \end{cases}$$



- Representación:



f)  $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

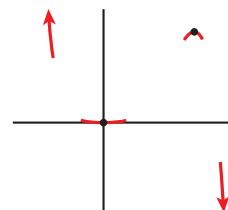
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

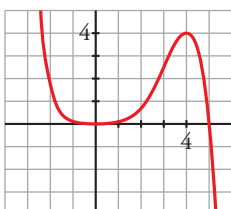
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \rightarrow x^3(20 - 5x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, f(0) = 0 \rightarrow \text{mínimo en } (0, 0). \\ x = 4, f(4) = 4 \rightarrow \text{máximo en } (4, 4). \end{cases}$$



- Representación:



g)  $y = x^5 - 5x^3$

- Ramas infinitas:

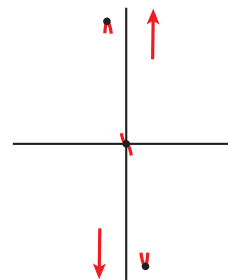
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

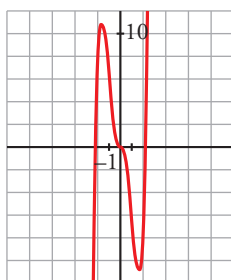
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^5 - 5\sqrt{3}^3 = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}^5 + 5\sqrt{3}^3 = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Tiene un máximo en  $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ , un mínimo en  $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$  y un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .



- Representación:



h)  $y = (x - 1)^3 - 3x$

- Ramas infinitas:

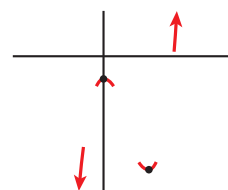
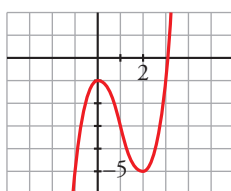
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 - 3; \quad 3(x - 1)^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0, f(0) = -1 \rightarrow (0, -1) \text{ es un máximo.} \\ x = 2, f(2) = -5 \rightarrow (2, -5) \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$

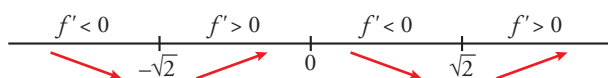
- Representación:



i)  $y = x^4 - 4x^2$

- Por ser una función polinómica, su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- Es simétrica respecto del eje vertical.
- No tiene asíntotas. En el infinito, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x, \quad f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2}, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{2}$$



$$x = -\sqrt{2}, \quad y = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$$

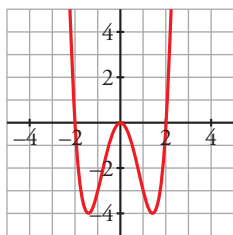
$$x = 0, \quad y = 0$$

$$x = \sqrt{2}, \quad y = -4$$

Los puntos de corte con el eje horizontal son las soluciones de:

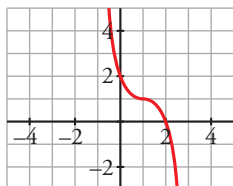
$$x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

- Representación:



j)  $y = 1 - (x - 1)^3$

- Por ser una función polinómica, su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- No tiene asíntotas. En el infinito tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.  
 $f'(x) = -3(x - 1)^2$ ,  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$
- Es decreciente en  $(-\infty, 1)$  y en  $(1, +\infty)$  ya que la primera derivada es negativa salvo en  $x = 1$ .  
 $x = 1 \rightarrow y = 1$
- Corta a los ejes en los puntos  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$ .
- Representación:



**10** Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Representálas gráficamente:

a)  $y = 3 + (2 - x)^3$

b)  $y = 2 - (x - 3)^4$

c)  $y = (x + 1)^6 - 5$

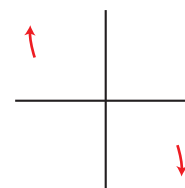
d)  $y = 3 - (1 - x)^3$

e)  $y = x(x - 1)(x + 3)$

f)  $y = (x - 2)^2(x + 1)x^3$

a)  $y = 3 + (2 - x)^3$

- Ramas infinitas  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -3(2 - x)^2$ ;  $-3(2 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 2$ ;  $f(2) = 3$

Signo de  $f'$ :  $\xrightarrow{f' < 0} \quad \xrightarrow{f' < 0}$

$f$  es decreciente en  $\mathbb{R}$ .

No tiene máximos ni mínimos.

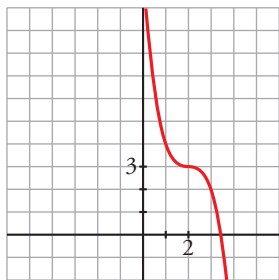
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 6(2 - x)$ ;  $6(2 - x) = 0 \rightarrow x = 2$ ;  $f(2) = 3$

Signo de  $f''$ :  $\xrightarrow{f'' > 0} \quad \xrightarrow{f'' < 0}$

El punto  $(2, 3)$  es un punto de inflexión con tangente horizontal ( $f''(2) = 0$  y  $f'(2) = 0$ ).

- Gráfica:

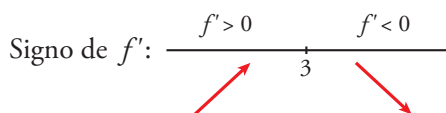


b)  $y = 2 - (x - 3)^4$

- Ramas infinitas  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

- Puntos singulares:

$f'(x) = -4(x - 3)^3$ ;  $-4(x - 3)^3 = 0 \rightarrow x = 3$ ;  $f(3) = 2$

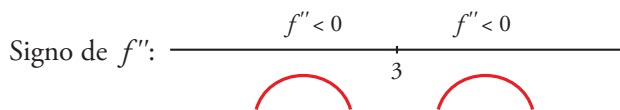


$f$  es creciente en  $(-\infty, 3)$  y decreciente en  $(3, +\infty)$ .

Tiene un máximo en  $(3, 2)$ .

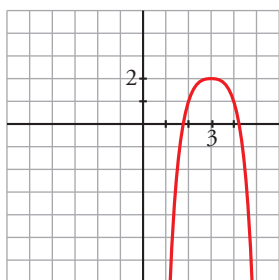
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = -12(x - 3)^2$ ;  $-12(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$ ;  $f(3) = 2$



No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:

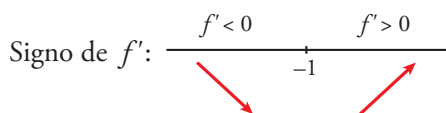


c)  $y = (x + 1)^6 - 5$

- Ramas infinitas  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

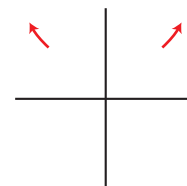
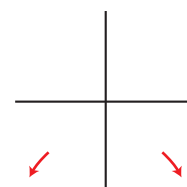
- Puntos singulares:

$f'(x) = 6(x + 1)^5$ ;  $6(x + 1)^5 = 0 \rightarrow x = -1$ ;  $f(-1) = -5$



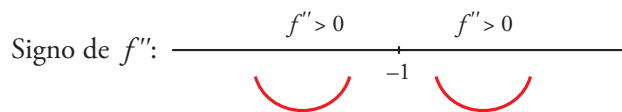
$f$  es decreciente en  $(-\infty, -1)$ . Es creciente en  $(-1, +\infty)$ .

Mínimo en  $(-1, -5)$ .



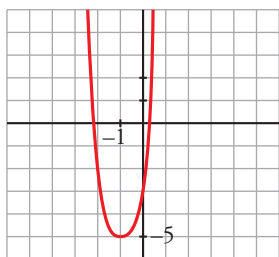
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 30(x + 1)^4; 30(x + 1)^4 = 0 \rightarrow x = -1; f(-1) = -5$$



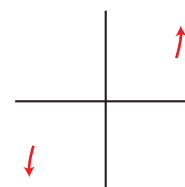
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



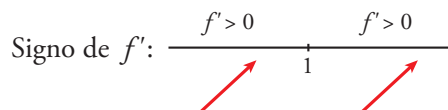
d)  $y = 3 - (1 - x)^3$

- Ramas infinitas  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(1 - x)^2; 3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1; f(1) = 3$$

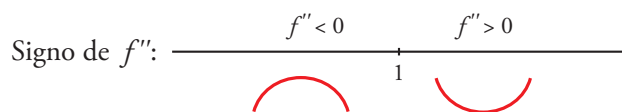


$f$  es creciente en  $\mathbb{R}$ .

No tiene máximos ni mínimos.

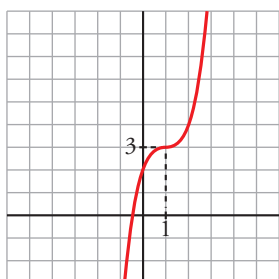
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -6(1 - x); -6(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1; f(1) = 3$$



(1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que  $f'(1) = 0$ .

- Gráfica:



e)  $y = x(x - 1)(x + 3)$

- Ramas infinitas  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = (x-1)(x+3) + x(x+3) + x(x-1) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}, x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$$

- Es creciente en  $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}\right)$  y en  $\left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$ .

Es decreciente en  $\left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}\right)$ .

$$x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \approx -1,87, y = 6,06 \rightarrow (-1,87; 6,06) \text{ es un máximo relativo.}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \approx 0,54, y = -0,88 \rightarrow (0,54; -0,88) \text{ es un mínimo relativo.}$$

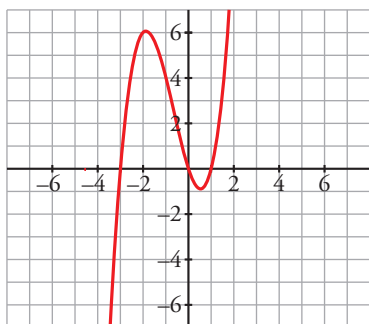
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x + 4; f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}; y \approx 2,6 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}; 2,6\right) \text{ es el punto de inflexión.}$$

- Corta a los ejes coordenados en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = -3$ .

- Gráfica:



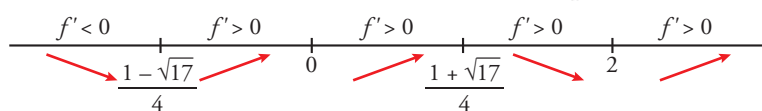
f)  $y = (x-2)^2(x+1)x^3$

- Ramas infinitas  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$  Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = ((x-2)^2(x+1)x^3)' = 2(x-2)(x+1)x^3 + (x-2)^2x^3 + (x+1)(x-2)^2 3x^2 = 6x^5 - 15x^4 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 15x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, x = 0, x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}, x = 2$$



$$x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx -0,78, y = -0,81 \rightarrow (-0,78; -0,81) \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx 1,28, y = 2,48 \rightarrow (1,28; 2,48) \text{ es un máximo relativo.}$$

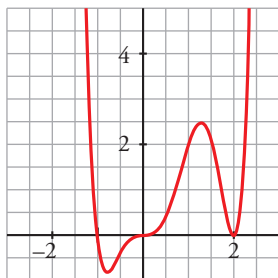
$$x = 2, y = 0 \rightarrow (2, 0) \text{ es un mínimo relativo.}$$

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 30x^4 - 60x^3 + 24x; f''(x) = 0 \rightarrow x = 0; x = 1,73; x = 0,83; x = -0,56$$

Los puntos de inflexión son  $(0, 0)$ ;  $(1,73; 1,03)$ ;  $(0,83; 1,43)$  y  $(-0,56; -0,51)$ .

- Corta a los ejes coordenados en los puntos  $x = 2$ ,  $x = -1$  y  $x = 0$
- Gráfica:



**Página 215**

**Funciones racionales**

**11** En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

- |                              |                                |                               |
|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $y = \frac{1}{x^2}$       | b) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$     | c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$    |
| d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$   | e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$     | f) $y = x + \frac{1}{x^2}$    |
| g) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$ | h) $y = \frac{x^3}{(1 - x)^2}$ | i) $y = \frac{4x^2}{1 + x^4}$ |

- a) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Tiene simetría par.
- Asíntotas verticales:

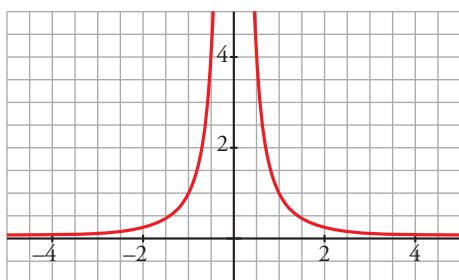
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  porque la función es positiva en todo su dominio. La recta  $x = 0$  es la asíntota vertical de la función.

- Asíntotas horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow$  La recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  y, también, por simetría, cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

La función está por encima de la asíntota por ser siempre positiva.

- Gráfica:



- b) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .
- Asíntotas:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

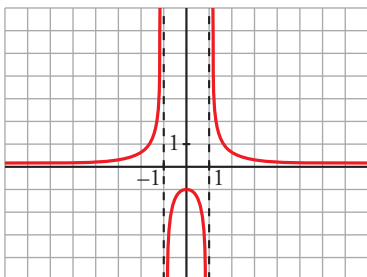
$y = 0$  es asíntota horizontal.

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:

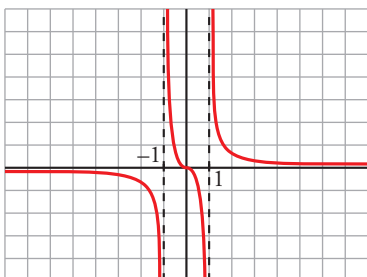


- c) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .
- Asíntotas:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )  
 $y = 0$  es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

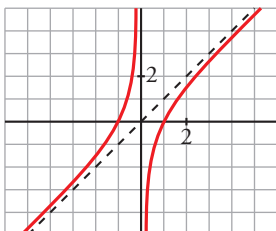
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:



- d) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .
- Asíntotas:  
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  }  $x = 0$  es asíntota vertical.  
 $y = x$  es asíntota oblicua.  
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < x$ )

- Gráfica:





e) • El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .

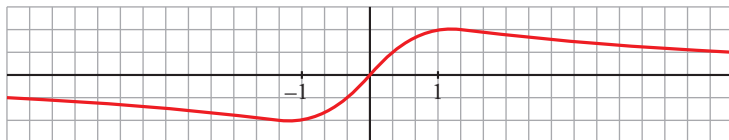
• Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal (si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

• Gráfica:



f) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

• Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ porque la fracción es positiva en todo su dominio.}$$

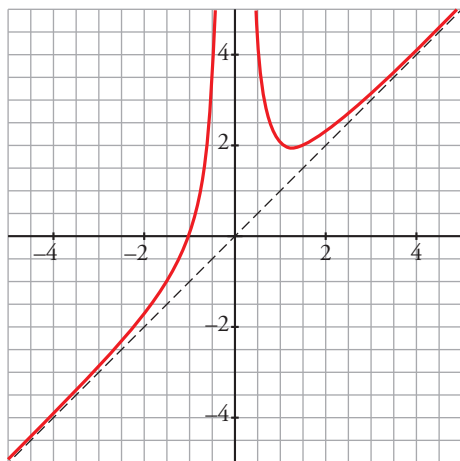
La recta  $x = 0$  es asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

• Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} \rightarrow \text{La recta } y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Como  $f(x) - x = \frac{1}{x^2} > 0$  salvo en  $x = 0$ , la función queda por encima de la asíntota oblicua.



g) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

La función tiene simetría impar.

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical. Análogamente, por simetría, lo es la recta } x = -1.$$

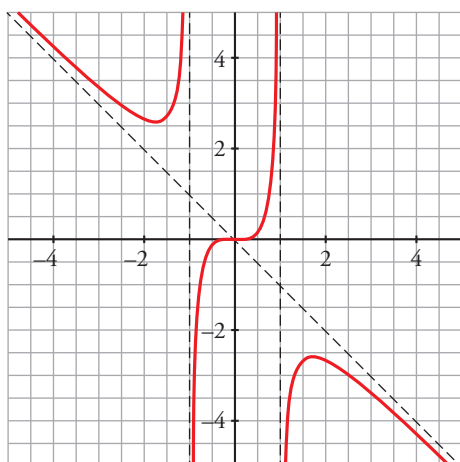
No tiene asíntotas horizontales.

• Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{La recta } y = -x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2 - 1} < 0 \rightarrow$  La función queda por debajo de la asíntota.

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2 - 1} > 0 \rightarrow$  La función queda por encima de la asíntota.



h) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

• Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty \text{ ya que el denominador es no negativo.}$$

La recta  $x = 1$  es una asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

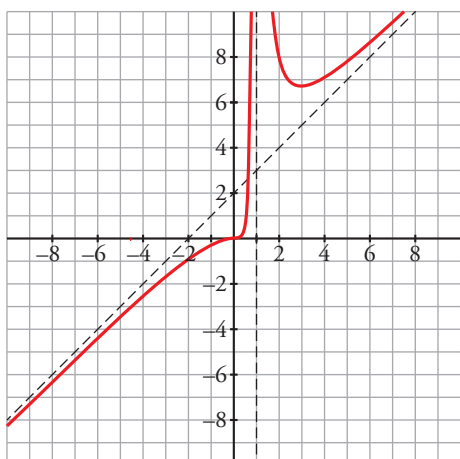
• Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} > 0 \rightarrow$  La función queda por encima de la asíntota.

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow$  La función queda por debajo de la asíntota.

• Gráfica:



i) • El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ . Es una función par.

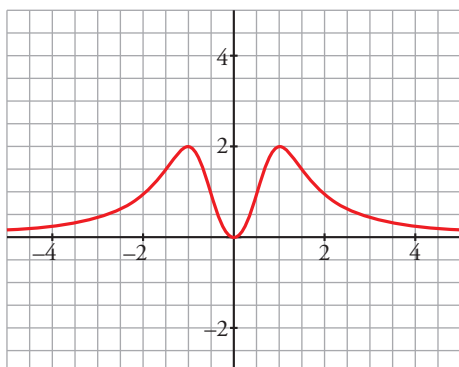
• No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{1+x^4} = 0$$

La recta  $x = 0$  es la asíntota horizontal de la función cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ .

La función queda por encima de la asíntota por ser positiva salvo en  $x = 0$ .

- Gráfica:



**12** Representa las siguientes funciones, estudiando su dominio de definición, las asíntotas y la posición de la curva respecto de estas, el crecimiento y los extremos relativos.

a)  $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

b)  $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$

c)  $y = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$

d)  $y = \frac{x^2}{9 - x^2}$

e)  $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

f)  $y = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$

g)  $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

h)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

i)  $y = \frac{x^3}{x + 2}$

j)  $y = \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$

a)  $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota horizontal.

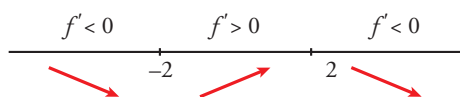
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x - 2)^2 - (4x - 12) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{4(x - 2) - 2(4x - 12)}{(x - 2)^3} = \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x - 2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x - 2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

Signo de  $f'(x)$ :

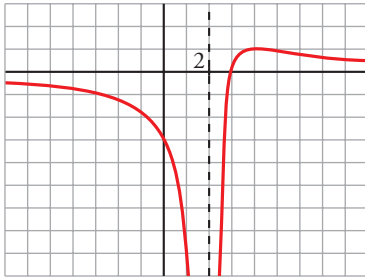


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ .

Es creciente en  $(2, 4)$ .

Tiene un máximo en  $(4, 1)$ .

- Gráfica:



b)  $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota horizontal.

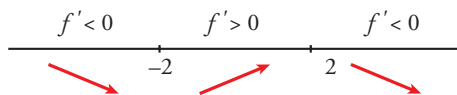
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

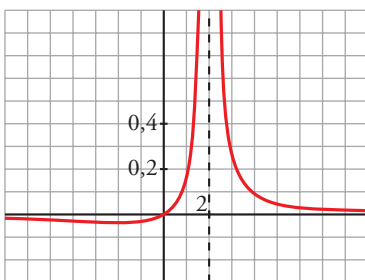
Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ . Es creciente en  $(-2, 2)$ .

Tiene un mínimo en  $(-2, -\frac{1}{8})$ .

- Gráfica:



c)  $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 2$  es asíntota oblicua.

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x - 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < x - 2$ )

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

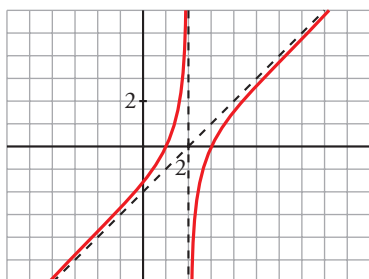
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$f(x)$  no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$  para todo  $x \rightarrow f(x)$  es creciente en todo su dominio.

- Gráfica:



d)  $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < -1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > -1$ )

$y = -1$  es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

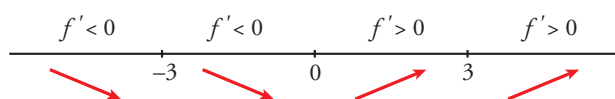
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

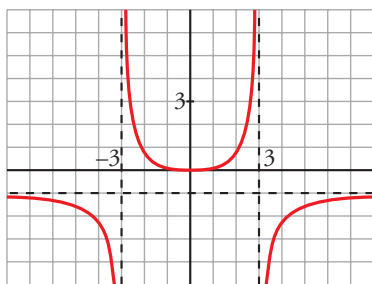


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ .

Es creciente en  $(0, 3) \cup (3, +\infty)$ .

Tiene un mínimo en  $(0, 0)$ .

- Gráfica:



e)  $y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$  es asíntota oblicua.

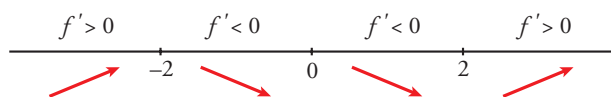
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x$ )

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



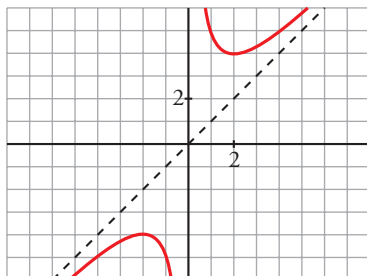
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

Es decreciente en  $(-2, 0) \cup (0, 2)$ .

Tiene un máximo en  $(-2, -4)$ .

Tiene un mínimo en  $(2, 4)$ .

- Gráfica:



f)  $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 1$ )

$y = 1$  es asíntota horizontal.

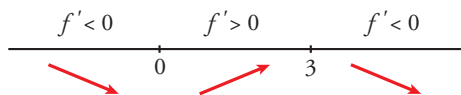
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

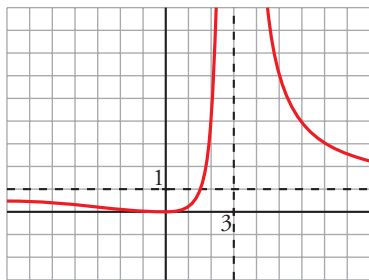


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ .

Es creciente en  $(0, 3)$ .

Tiene un mínimo en  $(0, 0)$ .

- Gráfica:



g)  $y = \frac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \frac{2x}{x^2+1}$

- Dominio:  $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$  es asíntota oblicua.

(si  $x \rightarrow -\infty, f(x) > 2x$ ; si  $x \rightarrow +\infty, f(x) < 2x$ ).

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

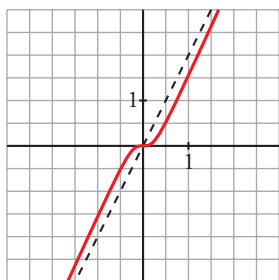
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2+3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

$f'(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .

$f(x)$  es creciente en todo  $\mathbb{R}$ .

- Gráfica:



h)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

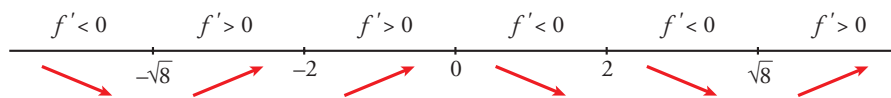
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



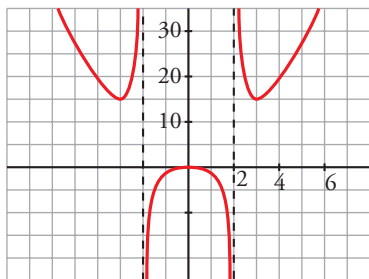
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$ .

Es creciente en  $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$ .

Tiene un mínimo en  $(-\sqrt{8}, 16)$  y otro en  $(\sqrt{8}, 16)$ .

Tiene un máximo en  $(0, 0)$ .

- Gráfica:



i)  $y = \frac{x^3}{x + 2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$



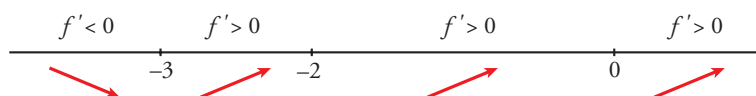
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



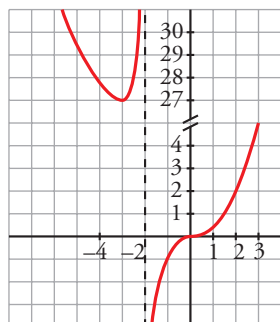
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -3)$ .

Es creciente en  $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$ .

Tiene un mínimo en  $(-3, 27)$ .

Tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

- Gráfica:



$$j) y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{1\}$

- Asíntotas:

$y = 1$  es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 3$  es asíntota oblicua.

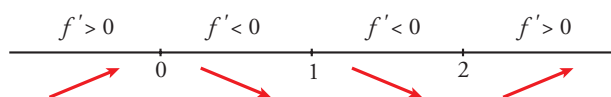
(si  $x \rightarrow -\infty, f(x) < x - 3$ ; si  $x \rightarrow +\infty, f(x) > x - 3$ )

- Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



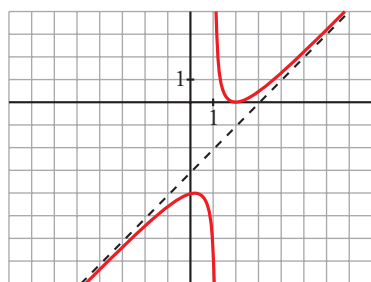
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

Es decreciente en  $(0, 1) \cup (1, 2)$ .

Tiene un máximo en  $(0, -4)$ .

Tiene un mínimo en  $(2, 0)$ .

• Gráfica:



**13** Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.

a)  $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

b)  $y = \frac{(x-1)}{x(x-3)(x+4)}$

c)  $y = \frac{8-2x}{x(x-2)}$

d)  $y = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)}$

a) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ .

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

• Asíntotas horizontales:

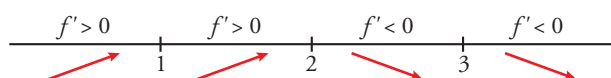
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

La función queda por encima de la asíntota cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

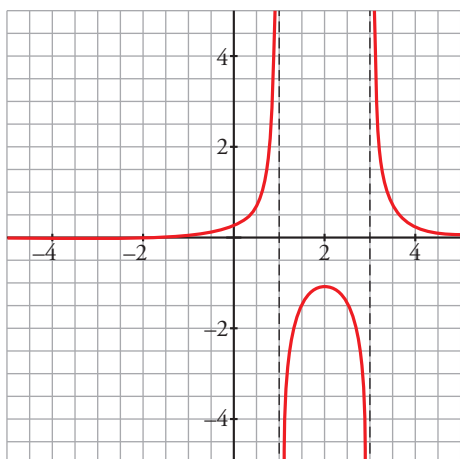
• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x = 2, y = -1$$



- Gráfica:



- b) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-4, 0, 3\}$ .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = -4 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

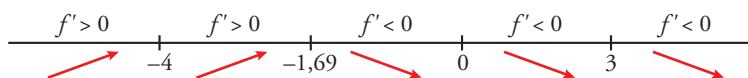
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

La función queda por encima de la asíntota cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

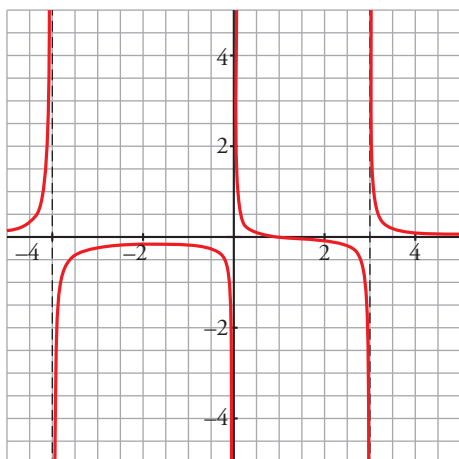
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2(-x^3 + x^2 + x - 6)}{x^2(x-3)^2(x+4)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = -1,69; y = -0,15$$



- Corta a los ejes en (1, 0).

- Gráfica:



- c) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8-2x}{x(x-2)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

La función queda por debajo de la asíntota cuando  $x \rightarrow +\infty$  y por encima cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

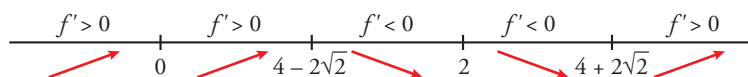
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8x + 8)}{x^2(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow x = 4 - 2\sqrt{2}, x = 4 + 2\sqrt{2}$$

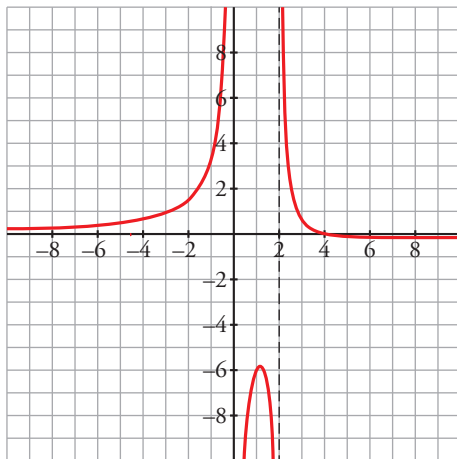
$$x = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17, y = -5,83$$

$$x = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83, y = -0,17$$



- Corta a los ejes en  $(4, 0)$ .

- Gráfica:



- d) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = 2x + 1 + \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} \rightarrow \text{La recta } y = 2x + 1 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

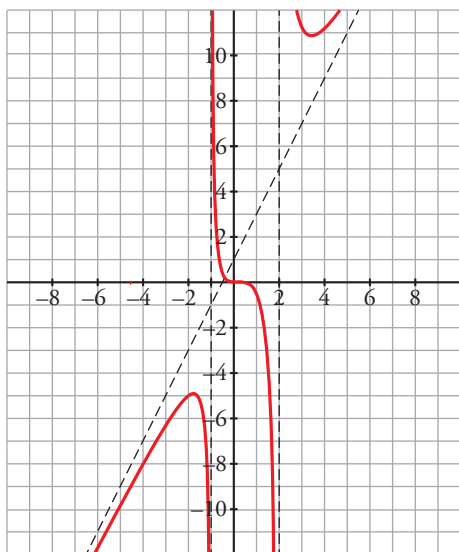
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0 \rightarrow x = 0,33; x = 3,43; x = -1,76 \end{cases}$$

- Corta a los ejes en  $(0, 0)$  y en  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

- Gráfica:



**14** Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y los extremos relativos para representar las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$       b)  $y = \frac{3 - 2x}{x}$       c)  $y = x^2 - \frac{2}{x}$       d)  $y = \frac{x^2}{x + 2}$

a)  $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

- Dominio:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3. \text{ Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

- Asíntotas verticales:

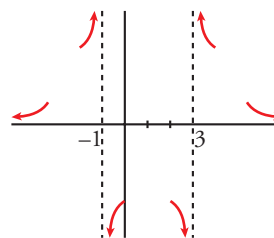
$$x = -1. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 3. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$y = 0, \text{ porque } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0.$$

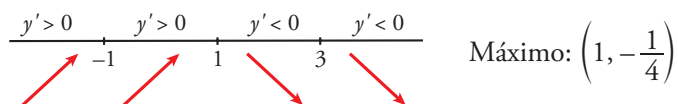
$$\text{Posición } \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y > 0 \end{cases}$$



- Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos:

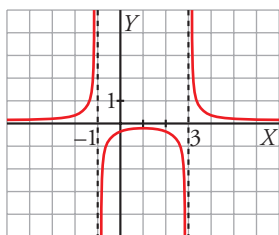
$$y' = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = -\frac{1}{4}$$

Signo de  $y'$ :



Intervalos de crecimiento:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

Intervalos de decrecimiento:  $(1, 3) \cup (3, +\infty)$



b)  $y = \frac{3 - 2x}{x}$

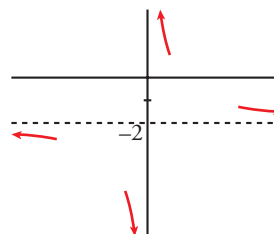
- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas verticales:

$x = 0$ . Posición  $\left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 - 2x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2x}{x} = +\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - 2x}{x} = -2, y = -2.$

Posición  $\left\langle \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > -2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < -2 \end{array} \right.$



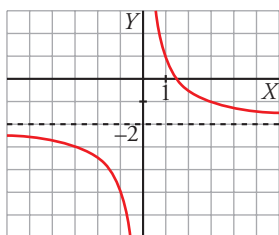
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$y' = \frac{-2x - (3 - 2x)}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$

Signo de  $y'$ : Es negativa en todo su dominio.

La función es decreciente en su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.



c)  $y = x^2 - \frac{2}{x}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical:

$x = 0$ . Posición  $\left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = -\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horizontal no tiene, porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty.$

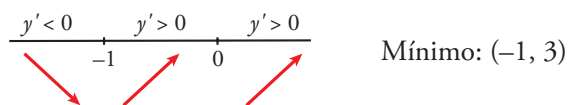
- Tampoco tiene asíntota oblicua, porque:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{2}{x^2}\right) = \pm\infty$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

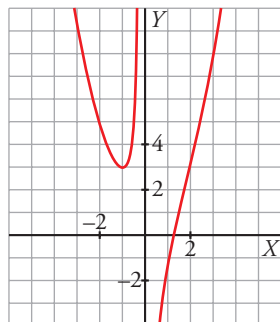
$$y' = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2}; y' = 0 \rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \rightarrow x = -1, f(-1) = 3$$

Signo de  $y'$ :



Intervalos de crecimiento:  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento:  $(-\infty, -1)$



d)  $y = \frac{x^2}{x+2}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntotas verticales:  $x = -2$

Posición  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array} \right.$

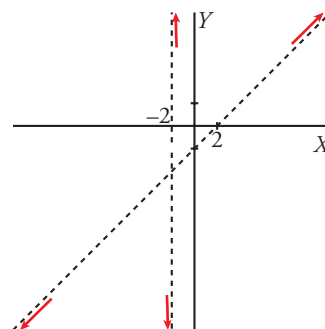
- Asíntota horizontal no tiene, porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+2} = \pm\infty$ .

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2}{-x^2 - 2x} \frac{|x+2|}{x-2} \rightarrow y = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

La recta  $y = x - 2$  es una asíntota oblicua.

Posición  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > x - 2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < x - 2 \end{array} \right.$

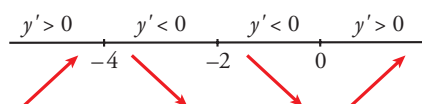


- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -4; y = -8 \end{array} \right.$$

Signo de  $y'$ :



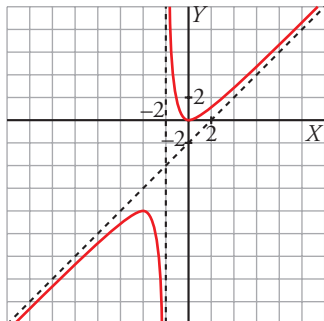


Crece en  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ .

Decrece en  $(-4, -2) \cup (-2, 0)$ .

Máximo:  $(-4, -8)$ .

Mínimo:  $(0, 0)$ .



**15 Representa las siguientes funciones racionales:**

a)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

b)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c)  $y = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$

d)  $y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3}$

e)  $y = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2}$

f)  $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x}$

Recuerda que si se simplifica una fracción dividiendo numerador y denominador por  $(x - a)$ , hay una discontinuidad evitable en  $x = a$ .

- a) • El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \rightarrow$  La recta  $y = 1$  es la asíntota horizontal de la función.

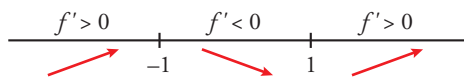
$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1}$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} < 0 \rightarrow$  La función queda por debajo de la asíntota.

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} > 0 \rightarrow$  La función queda por encima de la asíntota.

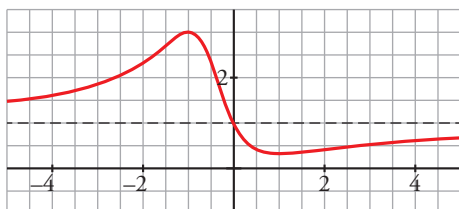
- Extremos relativos:

$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ ,  $f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$



$x = -1, y = 3$ ;  $x = 1, y = \frac{1}{3}$

- Gráfica:



b) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• No tiene asíntotas horizontales.

• Asíntotas oblicuas:

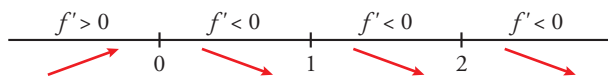
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow \text{La recta } y = x - 1 \text{ es la asíntota oblicua de la función.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

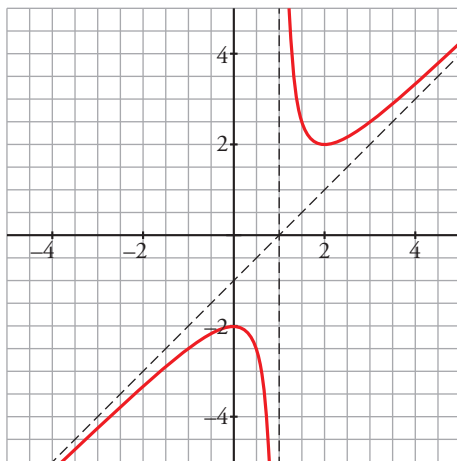
• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$



$$x = 0, y = -1; x = 2, y = 2$$

• Gráfica:



c) • El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .

• No tiene asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = 3 \rightarrow \text{La recta } y = 3 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

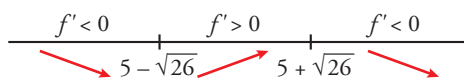
$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

- Extremos relativos:

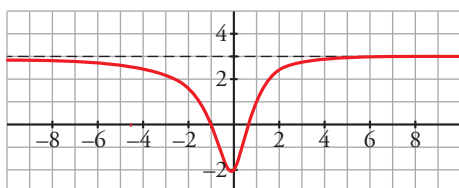
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(x^2 + 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 10x + 1 = 0 \rightarrow x = 5 - \sqrt{26}, x = 5 + \sqrt{26}$$



$$x = 5 - \sqrt{26} \approx -0,1, y = -2,05$$

$$x = 5 + \sqrt{26} \approx 10,1, y = 3,05$$

- Gráfica:



- d) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{La recta } y = \frac{1}{2} \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

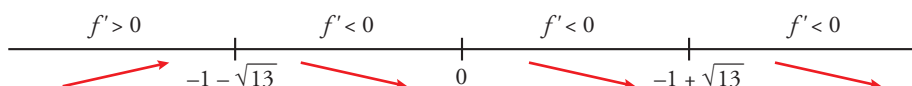
$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

- Extremos relativos:

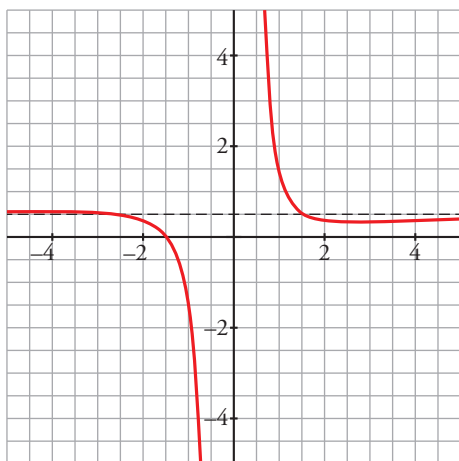
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 12}{2x^4}, f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x = -1 - \sqrt{13}, x = -1 + \sqrt{13}$$



$$x = -1 - \sqrt{13} \approx -4,6, y = \frac{(-4,6)^3 - 4,6^2 + 4,6 + 4}{-2 \cdot 4,6^3} = 0,56452$$

$$x = -1 + \sqrt{13} \approx 2,6, y = 0,35$$

- Gráfica:



- e) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ .

•  $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \frac{(x-1)(x^2 - 6x - 6)}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)}$  salvo en  $x = 1$ , donde presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\frac{11}{2}$$

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0 \rightarrow$  La función queda por encima de la asíntota.

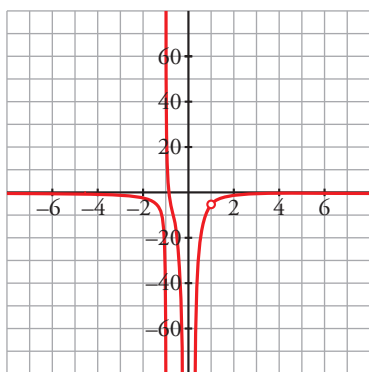
Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0 \rightarrow$  La función queda por debajo de la asíntota.

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 + 24x + 12}{x^3(x+1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + 12x^2 + 24x + 12 = 0 \rightarrow x = 13,8$$

$$x = 13,8; y = 0,036$$

- Gráfica:



- f) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$ .

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x^2 - x - 11)}{x(x+1)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)}$$

salvo en  $x = 2$ , donde presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)} < 0 \rightarrow$  La función queda por debajo de la asíntota.

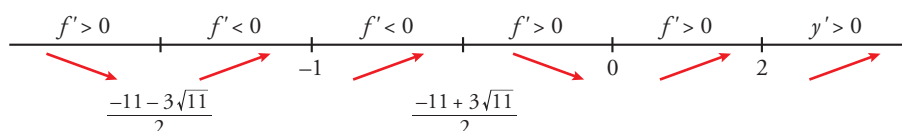
Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)} > 0 \rightarrow$  La función queda por encima de la asíntota.

- Extremos relativos:

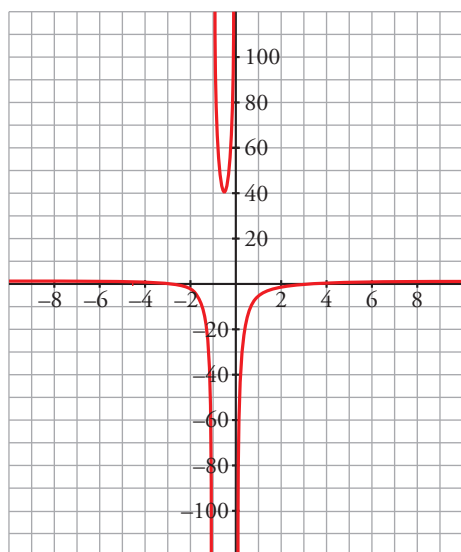
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 22x + 11}{x^2(x+1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 22x + 11 = 0$$

$$x = \frac{-11 - 3\sqrt{11}}{2} \approx -10,5; y = 1,1$$

$$x = \frac{-11 + 3\sqrt{11}}{2} \approx -0,53; y = 40,9$$



- Gráfica:



■ Funciones con valor absoluto y funciones a trozos

16 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si  $x < 0$ , es una parábola abierta hacia abajo:

Vértice:  $f'(x) = -2x - 2$ ;  $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, f(-1) = 3$

Cortes con el eje:  $-x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} \begin{cases} x \approx 0,73 \text{ (no vale por ser } 0,73 > 0) \\ x \approx -2,73 \end{cases}$

- Si  $x \geq 0$ , es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice:  $f'(x) = 2x - 2$ ;  $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 1$

Cortes con el eje X:  $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \rightarrow$  No tiene solución. No corta al eje X.

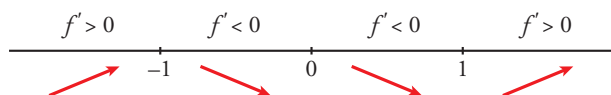
Corte con el eje Y:  $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = -2 = f'(0^+) \rightarrow$  Es derivable en  $x = 0$ .

- Signo de  $f'(x)$ :



Crece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrece en  $(-1, 1)$ .

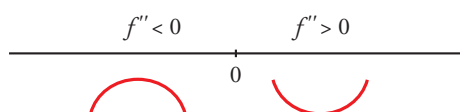
Tiene un máximo en  $(-1, 3)$  y un mínimo en  $(1, 1)$ .

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$ . No existe  $f''(0)$ .

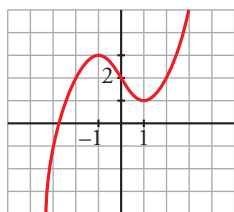
Signo de  $f''(x)$ :



La función es convexa en  $(-\infty, 0)$  y cóncava en  $(0, +\infty)$ .

En  $(0, 2)$  tiene un punto de inflexión.

- Representación:



### 17 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

Si  $x \neq 0$ ,  $f$  es continua por estar definida por polinomios.

Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0), f \text{ es continua en } x = 0.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

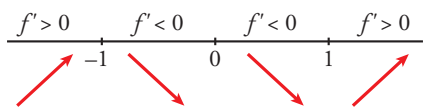
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array} \right.$$

Como  $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ ,  $f$  no es derivable en  $x = 0$ .

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1, f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x - 1) = 0 & \rightarrow x = 1, f(1) = 0 \end{cases}$$

Signo de  $f'$ :



Crece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Decrece en  $(-1, 1)$ .

Máximo en  $(-1, 3)$ .

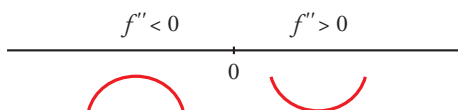
Mínimo en  $(1, 0)$ .

- Curvatura:

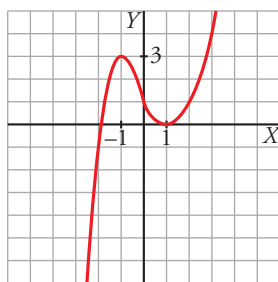
$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array} \right\}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$ . Por tanto, no existe  $f''(0)$ .

Signo de  $f''$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 1)$ .



**18 Representa las siguientes funciones. Indica, en cada caso, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos, si los hay:**

a)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a)  $f$  es continua si  $x \neq 1$  porque son continuas las funciones que la definen.

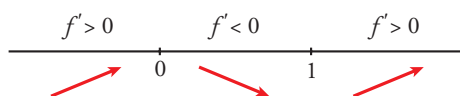
No es continua en  $x = 1$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$ .

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  No es derivable en  $x = 1$ , porque no es continua.

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0, 2x = 0 \rightarrow x = 0$



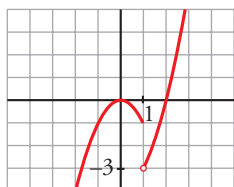
Signo de  $f'$ :



Crece en  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  y decrece en  $(0, 1)$ .

Máximo:  $(0, 0)$

Representación:



b)  $f$  es continua en  $x \neq 1$  porque son continuas las funciones que la definen.

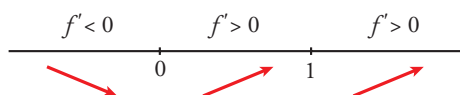
En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \end{aligned} \right\} f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ No es derivable en } x = 1, \text{ porque no existe } f'(1^+).$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

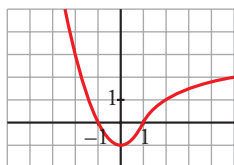
Signo de  $f'$ :



Crece en  $(0, +\infty)$  y decrece en  $(-\infty, 0)$ .

Mínimo:  $(0, -1)$

Representación:



c)  $f$  es continua si  $x \neq 1$ , porque lo son las funciones que la definen.

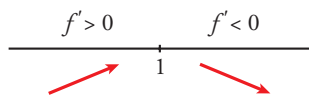
En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2 \end{aligned} \right\} f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ No es derivable en } x = 1, \text{ porque } f'(1^-) \neq f'(1^+).$$

No hay puntos en los que  $f'(x) = 0$ .

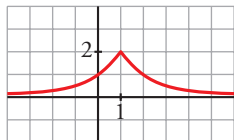
Signo de  $f'$ :



Crece en  $(-\infty, 1)$  y decrece en  $(1, +\infty)$ .

Máximo:  $(1, 2)$  (no es derivable en ese punto).

Representación:



d)  $f$  es continua en  $x \neq 1$ , porque lo son las funciones que la definen.

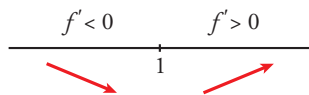
En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) = 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), f \text{ no es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ No existe } f'(1), \text{ porque } f \text{ es discontinua en } x = 1.$$

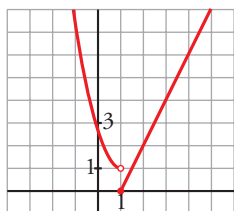
No existen puntos en los que  $f'(x) = 0$ .

Signo de  $f'$ :



Decrece en  $(-\infty, 1)$  y crece en  $(1, +\infty)$ .

Representación:



**19** Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo  $(-\infty, 0]$ , estudia si tiene puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, los puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Si  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Si  $x = 0$ ,  $y = -x + 1 = 1$

Cortes con los ejes:

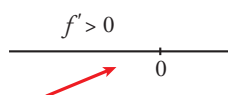
$$x = 0, y = 1 \rightarrow (0, 1)$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{No tiene solución. No corta al eje } Y.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}; \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 1$$

Signo de  $f'(x)$ :

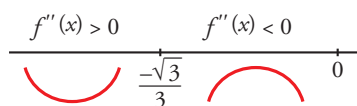


La función es creciente.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}; \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no vale)} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signo de  $f''(x)$ :



Punto de inflexión:  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \approx (-0,58; 0,75)$

- Representación:



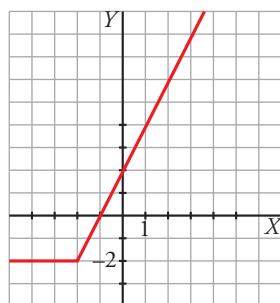
**20 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:**

a)  $y = x + |x + 2|$       b)  $y = 2x - |x - 3|$       c)  $y = |x| + |x - 3|$       d)  $y = x|x - 1|$

a)  $y = x + |x + 2|$

Como  $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$ , estudiamos  $f$  a la izquierda y a la derecha de  $-2$  para definirla por intervalos.

$$\begin{array}{c} -x-2 & & x+2 \\ \hline x & -2 & x \end{array} \quad \text{Sumamos: } \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

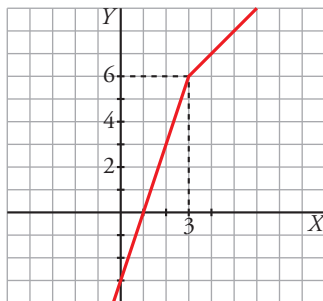


No es derivable en  $x = -2$ .

b)  $2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.

$$\begin{array}{c} -x+3 \qquad x-3 \\ \hline 2x \qquad 3 \qquad 2x \end{array} \quad \text{Restamos: } \begin{cases} 2x - (-x+3) = 3x-3 \\ 2x - (x-3) = x+3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si } x < 3 \\ x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

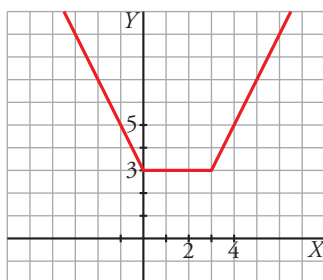


No es derivable en  $x = 3$ .

c)  $y = |x| + |x - 3|$

Como  $|x| = 0$  en  $x = 0$  y  $|x - 3| = 0$  en  $x = 3$ , estudiamos  $f$  a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

$$\begin{array}{c} -x \qquad \qquad x \qquad \qquad x \\ \hline -x+3 \quad 0 \quad -x+3 \quad 3 \quad x-3 \end{array} \quad \text{Sumamos: } \begin{cases} -x + (-x+3) = -2x+3 \\ x + (-x+3) = 3 \\ x + (x-3) = 2x-3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



No es derivable en  $x = 0$  ni en  $x = 3$ .

d)  $y = x|x - 1|$

Estudiamos  $f$  a la derecha y a la izquierda de  $x = 1$ .

$$\begin{array}{c} -x+1 \qquad x-1 \\ \hline x \qquad 1 \qquad x \end{array} \quad \text{Multiplicamos: } \begin{cases} x(-x+1) = -x^2+x \\ x(x-1) = x^2-x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x < 1 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

•  $y = -x^2 + x$  es una parábola abierta hacia abajo:

Vértice:  $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Cortes con  $OX$ :

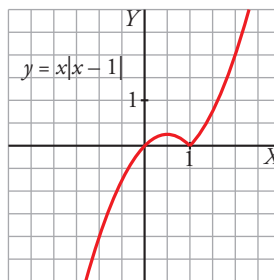
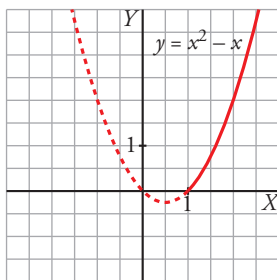
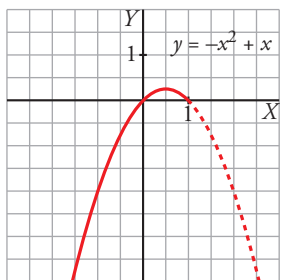
$-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

•  $y = x^2 - x$  es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice:  $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$  (no vale, ya que debe ser  $x \geq 1$ )

Cortes con  $OX$ :

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$



No es derivable en  $x = 1$ .

**21** Considera la función  $f(x) = x^2|x - 3|$ :

a) Halla los puntos donde  $f$  no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Representala gráficamente.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si  $x \neq 3$ , tenemos que  $f(x)$  es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= -9 \\ f'(3^+) &= 9 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f'(3^-) &\neq f'(3^+) \\ f(x) &\text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{aligned}$$

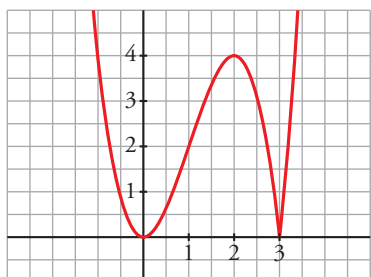
$$b) f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 & \text{si } x < 3 \\ 3x(-x + 2) = 0 & \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases} \\ 3x^2 - 6x = 0 & \text{si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$$

Como  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ , tenemos que:

$f(x)$  tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y otro en  $(3, 0)$ , y tiene un máximo en  $(2, 4)$ .

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



**22** Representa la función  $f(x) = -|x^3 - x^2 + 2|$ .

Para representarla, dibujamos la gráfica de la función  $y = x^3 - x^2 + 2$ . La gráfica de  $f(x)$  coincidirá con la de  $y$  en la zona donde esta esté por debajo del eje  $X$  y con su simétrica respecto del eje  $X$  si la de  $y$  está por encima del mismo.

Analicemos la función polinómica  $y = x^3 - x^2 + 2$ :

- Corte con el eje  $Y$ :  $x = 0, y = 2$

Cortes con el eje  $X$ :  $x^3 - x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

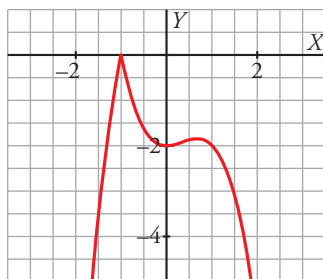
$$y' = 3x^2 - 2x, y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$$

$$y'' = 6x - 2$$

$x = 0 \rightarrow y'' = -2 < 0$   $(0, 2)$  es un máximo relativo.

$x = \frac{2}{3} \rightarrow y'' = 2 > 0 \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{50}{27} \approx 1,85; \left(\frac{2}{3}; 1,85\right)$  es un mínimo relativo.

Ahora tomamos el módulo de esta función y cambiamos el signo.



**Página 216**

**Para resolver**

**23** Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de estas funciones y, con esa información, relacionalas con sus respectivas gráficas:

a)  $y = \frac{1}{\text{sen } x}$

b)  $y = x e^x$

c)  $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

d)  $y = \sqrt[3]{x}$

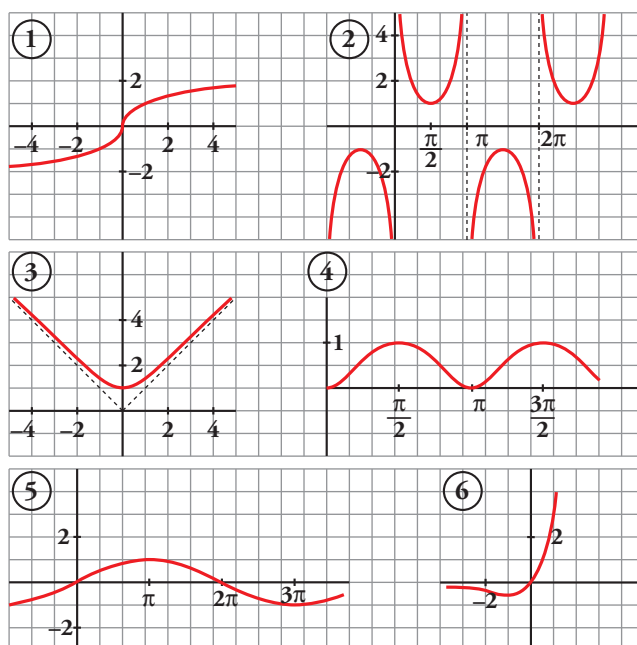
e)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f)  $y = \text{sen}^2 x$

a)  $y = \frac{1}{\text{sen } x}$

- Dominio:  $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$



- Asíntotas:

$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$  son asíntotas verticales.

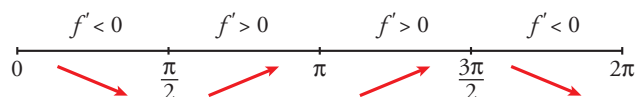
No hay más asíntotas.

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Signo de  $f'(x)$  en  $(0, 2\pi)$ :



$f(x)$  es periódica de período  $2\pi$ .

$f(x)$  es decreciente en  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ .

Es creciente en  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Tiene un mínimo en  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

Tiene un máximo en  $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ .

- Gráfica  $\rightarrow$  ②.

b)  $y = xe^x$

- Dominio:  $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) < 0$ ).

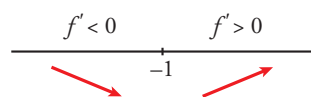
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

- Extremos:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -1)$ .

Es creciente en  $(-1, +\infty)$ .

Tiene un mínimo en  $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$ .

- Gráfica  $\rightarrow$  ⑥.

c)  $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

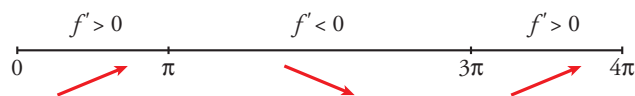
- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Asíntotas: No tiene.
- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$  es periódica de período  $4\pi$ .

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$ .

Es decreciente en  $(\pi, 3\pi)$ .

Tiene un máximo en  $(\pi, 1)$ .

Tiene un mínimo en  $(3\pi, -1)$ .

- Gráfica  $\rightarrow$  ⑤.

d)  $y = \sqrt[3]{x}$

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Asíntotas: No tiene.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ramas parabólicas.}$$

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$f'(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .

$f(x)$  es creciente.

- Gráfica  $\rightarrow$  ①.

e)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Simetría:

$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$  es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > x$ ).

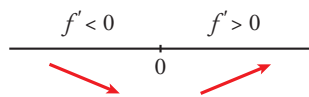
Por simetría,  $y = -x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) > -x$ ).

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$ .

Es creciente en  $(0, +\infty)$ .

Tiene un mínimo en  $(0, 1)$ .

- Gráfica  $\rightarrow$  ③.

f)  $y = \text{sen}^2 x$

- Dominio:  $\mathbb{R}$

- Asíntotas: No tiene.

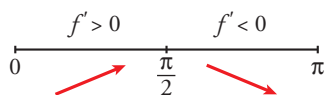
- Extremos:

$$f'(x) = 2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$  es periódica de período  $\pi$ .

Signo de  $f'(x)$  en  $(0, \pi)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Es decreciente en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Tiene un máximo en  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ .

Tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y otro en  $(\pi, 0)$ .

- Gráfica  $\rightarrow$  ④.

**24** Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b)  $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

a) Dominio:  $(-\infty) \cup (0, 1]$

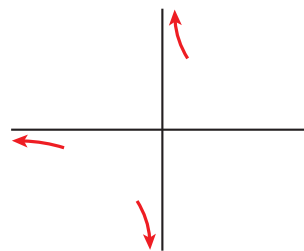
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $-\infty$  ( $y < 0$ ).



b) Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

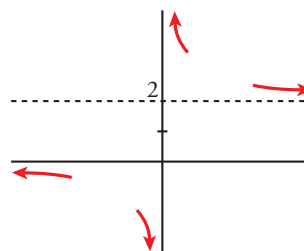
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$  es asíntota horizontal hacia  $+\infty$  ( $y > 2$ ).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $-\infty$  ( $y < 0$ ).



**25** Representa gráficamente cada una de estas funciones:

a)  $y = \frac{1}{|x| - 2}$

b)  $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

c)  $y = \frac{|x + 3|}{1 + |x|}$

a)  $y = \frac{1}{|x| - 2}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x-2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

■ Si  $x < 0$ ,  $y = \frac{1}{-x-2} = \frac{-1}{x+2}$ :

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntota vertical:

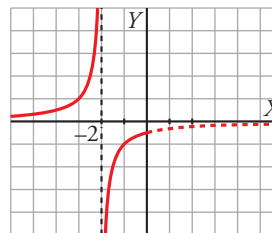
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2, & f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{Si } x > -2, & f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$x = -2$  es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $-\infty$  ( $f(x) > 0$ ).



- Si  $x \geq 0$ ,  $y = \frac{1}{x-2}$ :

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asíntota vertical:

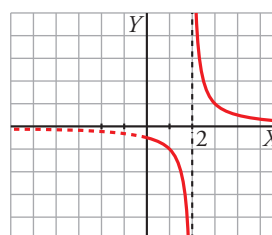
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 2, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$x = 2$  es una asíntota vertical.

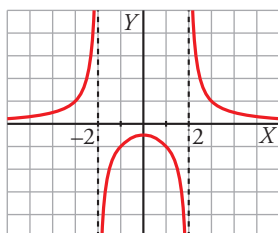
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $+\infty$  ( $f(x) > 0$ ).



La gráfica de  $y = \frac{1}{|x|-2}$  es:



b)  $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si  $x < 0$ ,  $y = \frac{-2x}{x^2 + 1}$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

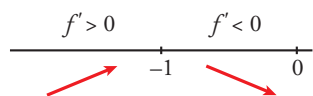
$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $-\infty$  ( $y > 0$ ).

- Puntos singulares:

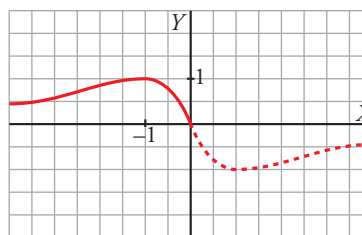
$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signo de  $f'$ :



Máximo en  $(-1, 1)$ .



■ Si  $x \geq 0$ ,  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

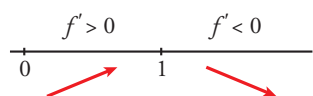
$y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $+\infty$  ( $y > 0$ ).

- Puntos singulares:

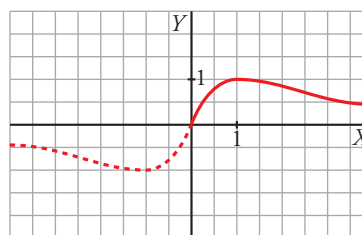
$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale, } -1 < 0) \\ x = 1, f(1) = 1 \end{cases}$$

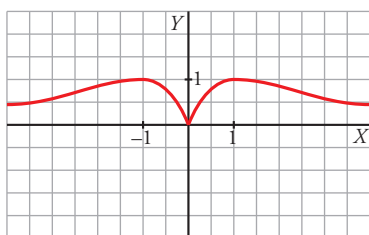
Signo de  $f'$ :



Máximo en  $(1, 1)$ .



La gráfica de  $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$  es:



$$c) |x + 3| = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases} \quad |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|x + 3|}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{-x - 3}{1 - x} & \text{si } x < -3 \\ \frac{x + 3}{1 - x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x + 3}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .
- Corte con el eje  $Y$ :  $x = 0$ ,  $y = 3$

Cortes con el eje  $X$ :  $y = 0 \rightarrow \frac{|x + 3|}{1 + |x|} = 0 \rightarrow |x + 3| = 0 \rightarrow x = -3$

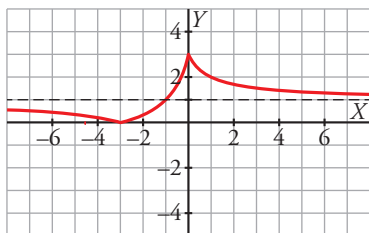
- No tiene asíntotas verticales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1+x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-3}{1-x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{La recta } y = 1 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(1-x)^2} & \text{si } x < -3 \\ \frac{4}{(1-x)^2} & \text{si } -3 < x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$  es creciente en el intervalo  $(-3, 0)$ .

$f(x)$  es decreciente en los intervalos  $(-\infty, -3)$  y  $(0, +\infty)$ .



**26** Realiza un estudio y representa cada una de las siguientes funciones:

a)  $y = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$       b)  $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$       c)  $y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$       d)  $y = \frac{e^{|x-1|}}{x^2+2x-3}$

- a) • Dominio de definición:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \rightarrow x^2-1 > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

La función tiene simetría par. Podemos limitarnos a estudiarla en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

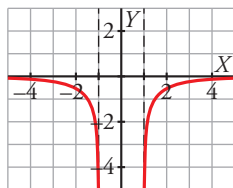
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = -\infty \rightarrow \text{Las rectas } x = 1, x = -1 \text{ son las asíntotas verticales de la función.}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

- $f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} \rightarrow f(x)$  es creciente en el intervalo  $(1, +\infty)$ .



- b) • El dominio de definición es  $\mathbb{R}$ .

- Corte con el eje  $Y$ :  $x = 0, y = 0$

Cortes con el eje  $X$ :  $y = 0 \rightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 \rightarrow x = 0$

- No tiene asíntotas verticales.

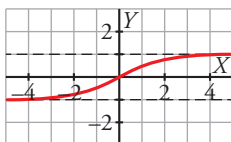
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/e^x}{1 + 1/e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

Las rectas  $y = 1$  y  $y = -1$  son las asíntotas horizontales cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ , respectivamente.

- $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \rightarrow y$  es creciente en todo  $\mathbb{R}$ .



- c) • Dominio de definición:

$$\frac{x}{x+1} > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$$

Las rectas  $x = -1$  y  $x = 0$  son las asíntotas verticales de la función.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

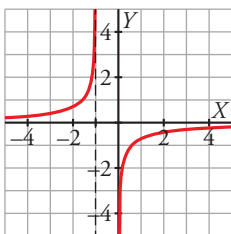
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

La recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal de la función.

- $y' = \frac{1}{x(x+1)}$

Si  $x > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow y$  es creciente en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

Si  $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow y$  es creciente en el intervalo  $(-\infty, -1)$



- d) • El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto,  $y = \begin{cases} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x < 1 \text{ y } x \neq -3 \\ \frac{e^{x-1}}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- Corte con el eje  $Y$ :  $x = 0, y = -\frac{e}{3}$

- Asíntotas verticales:

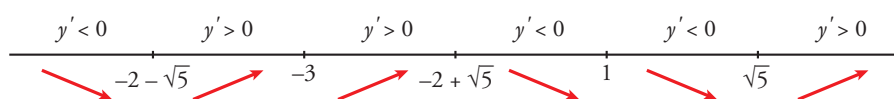
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \end{aligned} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

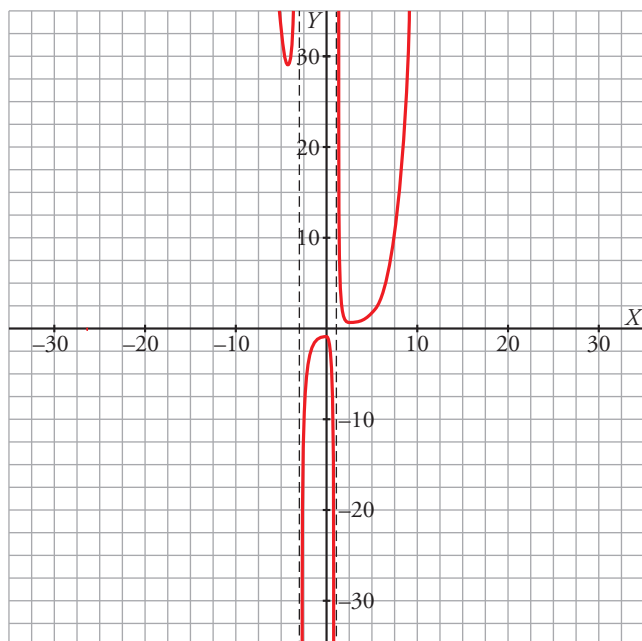
No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

$$y' = \begin{cases} \frac{e^{1-x}(-x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} & \text{si } x < 1 \text{ y } x \neq -3 \\ \frac{e^{x-1}(x^2 - 5)}{(x^2 + 2x - 3)^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$y' = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{e^{1-x}(-x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -2 - \sqrt{5}, x = -2 + \sqrt{5} \\ \frac{e^{x-1}(x^2 - 5)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5} \end{cases}$$



Hallamos las ordenadas de los extremos relativos y se obtiene la gráfica:



**27** La recta  $y = 2x + 6$  es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$$

Halla el valor de  $k$  y representa la función así obtenida.

- Hallamos  $k$ :

Si  $y = 2x + 6$  es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \quad | \quad x - k \\ -2x^2 + 2kx \quad | \quad 2x + 2k \\ \hline 2kx + 1 \\ -2kx + 2k^2 \\ \hline 1 + 2k^2 \end{array}$$

La asíntota oblicua es  $y = 2x + 2k$

$$2x + 2k = 2x + 6 \rightarrow 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

Por tanto,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{3\}$
- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$  es asíntota oblicua.

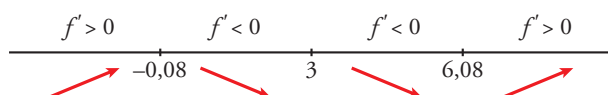
Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2x + 6$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2x + 6$ .

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$ .

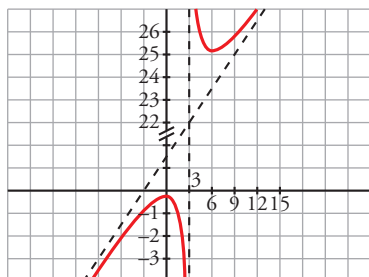


Es decreciente en  $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$ .

Tiene un máximo en  $(-0,08; -0,33)$ .

Tiene un mínimo en  $(6,08; 24,32)$ .

- Gráfica:



**28** Dada la función:

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

calcula  $a$  y  $b$  para que la gráfica de  $f$  pase por el punto  $(-2, -6)$  y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de  $a$  y  $b$ , representa la función.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } (-2, -6), f(-2) = -6 \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \text{Tangente horizontal} \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Para estos valores, queda:  $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

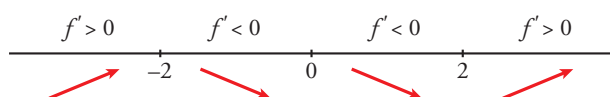
(Si  $x \rightarrow -\infty, f(x) < 2x + 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty, f(x) > 2x + 2$ )

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

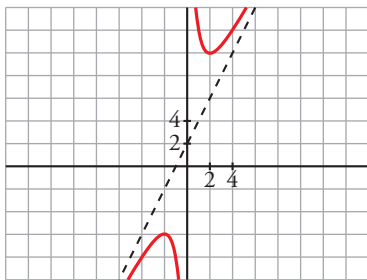
Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ . Es decreciente en  $(-2, 0) \cup (0, 2)$ .

Tiene un máximo en  $(-2, -6)$ . Tiene un mínimo en  $(2, 10)$ .

- Gráfica:



**29** Halla los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para los cuales la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

tiene como asíntota horizontal la recta  $y = -1$  y un mínimo en el punto  $(0, 1)$ .

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

Si  $y = -1$  es asíntota horizontal  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$

Si tiene un mínimo en  $(0, 1)$ , debe ser  $f'(0) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + c)2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

Además,  $f(0) = 1 \rightarrow \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$$

**30** Comprueba que la función  $y = \frac{|x|}{x+1}$  tiene dos asíntotas horizontales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

**31** La función  $f(x) = x + e^{-x}$ , ¿tiene alguna asíntota? En caso afirmativo, hállala.

$$f(x) = x + e^{-x}$$

- Dominio:  $\mathbb{R}$ .
- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x \cdot e^x} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$y = x$  es asíntota oblicua hacia  $+\infty$ .

No hay asíntota oblicua hacia  $-\infty$  porque:  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x + e^{-x}}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty$

**32** Dada la función  $f(x)$ :

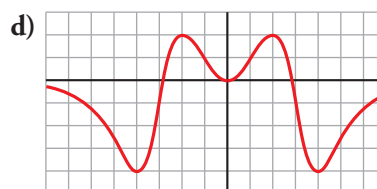
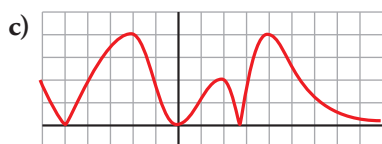
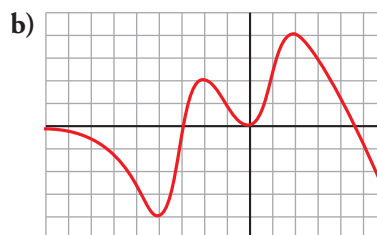
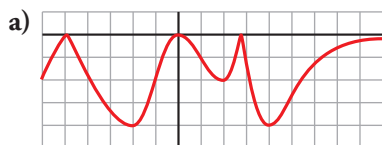
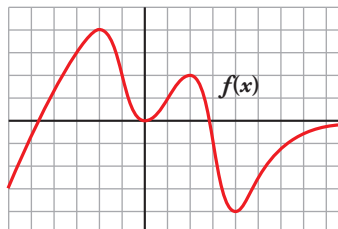
Indica qué gráfica corresponde a estas otras:

$f(-x)$

$f(|x|)$

$-|f(x)|$

$|f(x)|$



a)  $-|f(x)|$

b)  $f(-x)$

c)  $|f(x)|$

d)  $f(|x|)$

**33** La siguiente función representa la demanda de un artículo a lo largo de los años:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8t + 4}{t + 2} & \text{si } t > 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t: \text{ años} \\ f(t): \text{ miles de artículos} \end{array}$$

a) Representa la función.

b) ¿Qué cantidad se demanda a los 2 años? ¿A partir de cuándo se demandan más de 6000 unidades?

c) ¿Qué cantidad de unidades nunca llegará a superar la demanda por mucho que pase el tiempo?

a) En el primer intervalo, la función está definida mediante una parábola. En el segundo intervalo es un trozo de parábola.

- La función es continua en  $t = 2$ , ya que:

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} (t^2 + 1) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{8t + 4}{t + 2} = 5 \end{cases}$$

- Tiene una asíntota horizontal cuando  $t \rightarrow +\infty$ , puesto que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t + 4}{t + 2} = 8$ .

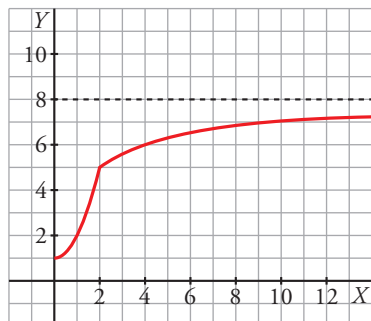
Posición:

Si  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{8t + 4}{t + 2} - 8 = -\frac{12}{t + 2} < 0$ . La función queda por debajo de la asíntota.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 2 \\ \frac{12}{(t+2)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Siempre es positiva, por tanto, siempre es creciente.



- b) Como  $f(2) = 5$ , a los 2 años se demandan 5 000 unidades.

$$6 = \frac{8t + 4}{t + 2} \rightarrow t = 4. \text{ Por tanto, a partir de los 4 años se demandan más de 6 000 unidades.}$$

- c) Como podemos ver en la gráfica, al ser  $y = 8$  asíntota horizontal, la demanda nunca superará las 8 000 unidades.

**34** La variación del precio de un artículo viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 & t: \text{ años} \\ 5 - \frac{t}{2} & \text{si } 2 < t \leq 6 & f(t): \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

- a) Representa la función.

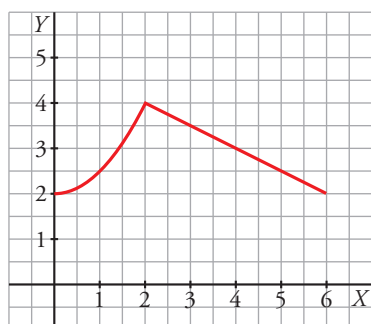
- b) ¿Cuál fue el precio inicial? ¿Y el final?

- c) ¿Cuánto duró la venta del artículo? ¿Cuál fue su precio máximo?

- a) La función está definida por intervalos mediante dos funciones polinómicas. La primera es una parábola y la segunda es una recta.

• Es continua en  $t = 2$ , ya que  $f(2) = 4$  y  $\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left( \frac{t^2}{2} + 2 \right) = 4$   
 $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left( 5 - \frac{t}{2} \right) = 4$

- Su gráfica es:



- b) Como  $f(0) = 2$ , el precio inicial fue de 200 €. El final fue también de 200 € porque  $f(6) = 2$ .

- c) El artículo se vendió durante 6 años. El precio máximo fue de 400 € y se dio a los 2 años, ya que  $f(2) = 4$ .

## Cuestiones teóricas

**35** Una función  $f(x)$  tiene las siguientes características:

$Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$  y es derivable en todo su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son seguras, cuáles son posibles y cuáles son imposibles:

- a)  $f(x)$  es par.
  - b)  $f(x)$  es impar.
  - c) No tiene máximos ni mínimos.
  - d) Tiene un máximo y un mínimo.
  - e) Corta al eje  $X$  en dos puntos.
  - f) Corta el eje  $X$  al menos en dos puntos.
  - g) Tiene una asíntota oblicua.
- a) Imposible, porque, por ejemplo, en las proximidades de  $x = 0$  no es simétrica respecto del eje vertical.
  - b) Probable, porque una función impar puede cumplir estas condiciones.
  - c) Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.
  - d) Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.
  - e) Probable, por su continuidad y su comportamiento a ambos lados del eje vertical.
  - f) Seguro. Por ser continua debe cortar al semieje negativo de las  $X$  al subir desde  $-\infty$  (cuando  $x \rightarrow -\infty$ ) hasta  $+\infty$  (cuando  $x \rightarrow 0^-$ ). Análogamente ocurre con el semieje positivo de las  $X$ .
  - g) Probable. Puede ser también ramas parabólicas.

**36** La función  $y = \frac{x+1}{x^2-1}$  no está definida en  $x = 1$  ni en  $x = -1$ ; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical.

Justifica esta información.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

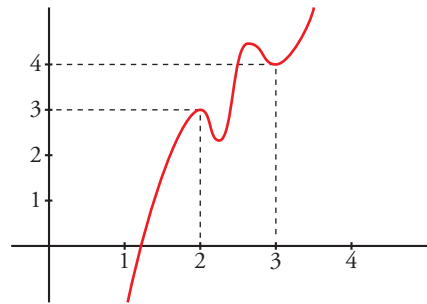
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En  $x = -1$  hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

- 37** Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo  $[0, 4]$  que tenga, al menos, un máximo relativo en  $(2, 3)$  y un mínimo relativo en  $(3, 4)$ . Si la función fuera polinómica, ¿cuál debería ser, “como mínimo” su grado?

$f(x)$  debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en  $[0, 4]$ , si es derivable.

Si  $f(x)$  fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues  $f'(x)$  se anularía, al menos, en cuatro puntos).



## Para profundizar

- 38** La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo  $t \in [0, +\infty)$  medido en segundos, por la función:

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

- a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué  $t$  la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?

- b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

a)  $N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$

$N'(t) = \frac{120e^{-t}}{(2e^{-t} + 1)^2}$  es siempre positivo para cualquier valor de  $t$ . Por tanto,  $N(t)$  es creciente.

La concentración de nitrógeno es mínima para  $t = 0$  y su valor es  $N(0) = 20$ .

b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60$  es el valor al que tiende la concentración cuando el tiempo tiende a infinito.

- 39** Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación  $y = \frac{2x}{1 - x^2}$  para  $x > 1$ .

En el punto  $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$  la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

- a) Halla la ecuación de la tangente.

- b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto  $P$ .

- c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje  $X$ .

- a) Pendiente de la recta tangente en  $x = 2$ :

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en  $P$  es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x - 2) \rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

- b) La asíntota vertical más próxima a  $P$  es  $x = 1$ . Tenemos que hallar el punto de intersección de  $x = 1$  con la recta tangente anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} y = \frac{-22}{9} \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \text{El punto es } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

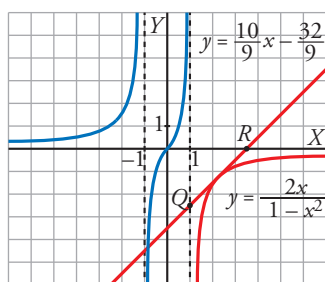
- c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje  $OX$ :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{El punto es } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Esta gráfica muestra la curva  $y = \frac{2x}{1-x^2}$ ,

la recta tangente  $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$  y los

puntos  $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$  y  $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$ .



## Autoevaluación

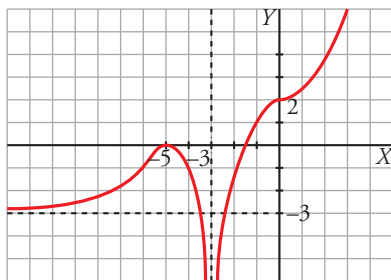
Página 217

1 Dibuja la gráfica de una función  $f$  de la que sabemos:

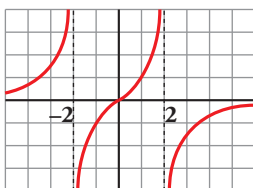
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$f'(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$

Tiene tangente horizontal en los puntos  $(-5, 0)$  y  $(0, 2)$ . En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.



2 Describe la gráfica de la siguiente función:



- El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

Es una función impar, continua y derivable en su dominio.

- Tiene dos asíntotas verticales: las rectas  $x = -2$  y  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

La recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal de la función cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

- Es creciente en los intervalos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(2, +\infty)$ .

3 ¿Tiene  $f(x) = x^3 + 2x + 4$  máximos y/o mínimos? ¿Y algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$$f(x) = x^3 + 2x + 4$$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$$

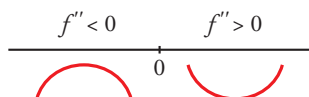
No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$



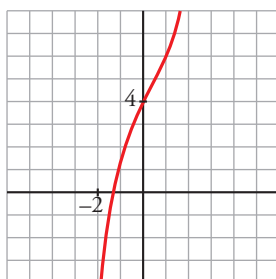
Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 4)$ .

• Además,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Gráfica:



**4** Estudia las asíntotas y los puntos singulares de cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a)  $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

a) • Dominio:  $\mathbb{R}$

• Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales, ya que  $x^2 + 4 \neq 0$ .

Horizontales:  $y = 0$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 + 4} = 0$ .

Posición  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0 \end{array} \right.$

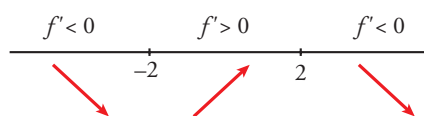


• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

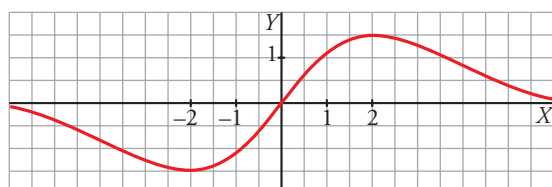
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2, f(-2) = -3/2 \\ x = 2, f(2) = 3/2 \end{array} \right.$$

Signo de  $f'(x)$ :



Mínimo:  $(-2, -\frac{3}{2})$ . Máximo:  $(2, \frac{3}{2})$ .

• Representación:



b) • Dominio:  $\mathbb{R} - \{3\}$

• Asíntotas verticales:  $x = 3$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm \infty$ .

Posición  $\left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty \end{array} \right.$

• Asíntotas horizontales:

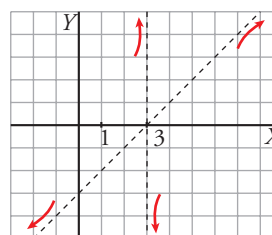
No tiene, porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$

• Asíntotas oblicuas:

Expresamos la función de la forma  $\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \frac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición  $\left\langle \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) < x - 3 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) > x - 3 \end{array} \right.$



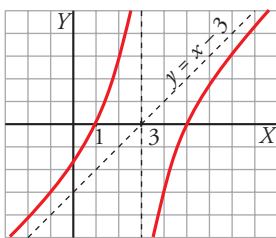
• Puntos singulares:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no tiene solución).}$$

Signo de  $y'$ : la derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos  $(0, -\frac{5}{3})$ ,  $(1, 0)$  y  $(5, 0)$ .



**5 Representa la función  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ . Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.**

Para  $x < 2$ , la gráfica es una parábola con vértice en  $(0, 4)$ .

Para  $x > 2$ , es una recta.

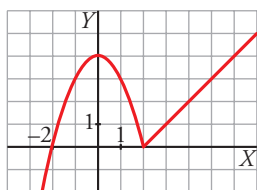
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ No es derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 4 \left\langle \begin{array}{l} f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{Es decreciente en } (0, 2). \end{array} \right.$$

Tiene un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

Representación:



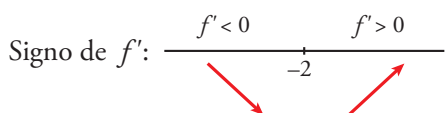
**6** Halla los máximos y los mínimos de  $f(x) = x\sqrt{x+3}$ . Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.

$f(x) = x\sqrt{x+3}$ . Dominio =  $(-3, +\infty)$

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x+6 = 0 \rightarrow x = -2, f(-2) = -2$$

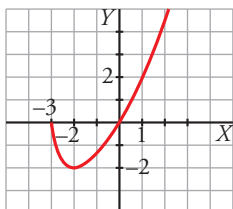


La función tiene un mínimo en  $(-2, -2)$ .

- La función no tiene asíntotas:

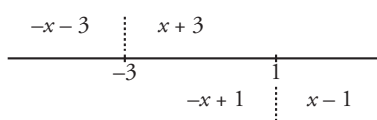
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- Gráfica:



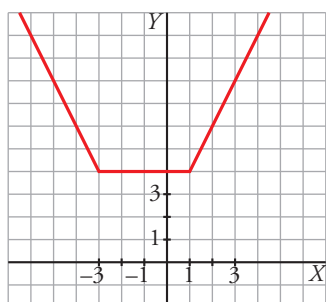
**7** Dibuja la gráfica de  $f(x) = |x+3| + |x-1|$ .

$f(x) = |x+3| + |x-1|$



- Si  $x < -3$ :  $-x-3-x+1 = -2x-2$
- Si  $-3 \leq x < 1$ :  $x+3-x+1 = 4$
- Si  $x \geq 1$ :  $x+3+x-1 = 2x+2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



**8** Calcula los puntos de corte con los ejes y los puntos singulares de la función  $y = \ln(-x^2 + 1)$ . Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.

• Dominio =  $(-1, 1)$   $\rightarrow$   $y$  es una función par.

•  $f(x) = 0 \rightarrow f(x) = -x^2 + 1 = 1 \rightarrow x = 0$

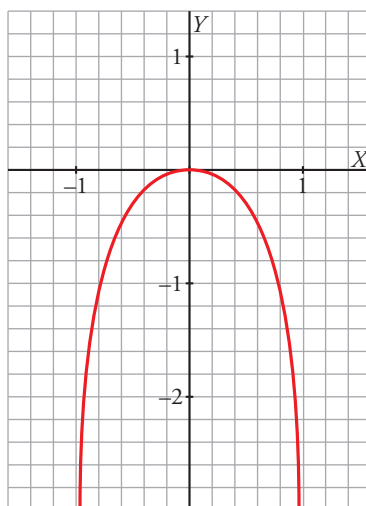
El único punto de corte con los ejes es  $(0, 0)$ .

•  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0$  para todo  $x$ .

Por tanto,  $(0, 0)$  es un máximo.

•  $f$  tiene dos asíntotas verticales en  $x = -1$  y  $x = 1$ .



**9** Representa la función  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ .

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

• Dominio =  $\mathbb{R}$ .

• No tiene asíntotas verticales, porque  $e^x \neq 0$  para todo  $x$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0$  es asíntota horizontal hacia  $+\infty \rightarrow f(x) > 0$

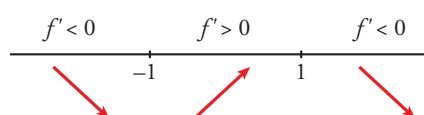
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow$  No tiene asíntota horizontal hacia  $-\infty$ .

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x+2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

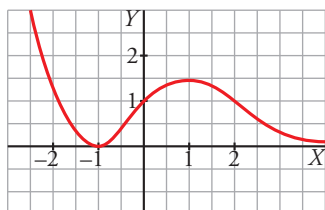
$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = 1, & f(1) = \frac{4}{e} \\ x = -1, & f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signo de  $f'$ :



Mínimo:  $(-1, 0)$ . Máximo:  $(1, \frac{4}{e})$

- Gráfica:



**10** ¿Qué gráfica corresponde a  $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$ ?



$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Asíntota vertical:  $x = 0$
- Asíntotas horizontales:  $y = -1$  e  $y = 1$

La gráfica de  $f$  es la primera.